SÉRIE A, N°

N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Paul KUENTZMANN

1ère THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES PERTES D'IMPULSION SPÉCIFIQUE DANS LES FUSÉES A PROPERGOL SOLIDE.

2e THÈSE : L'EFFET POGO DANS LES FUSÉES A PROPERGOL LIQUIDE.

Soutenues le 26 juin 1973 devant la Commission d'examen

MM. FORTIER Président

SIESTRUNCK, BARRERE } Examinateurs

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1973

SÉRIE A, N°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Paul KUENTZMANN

1ère THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES PERTES D'IMPULSION SPÉCIFIQUE DANS LES FUSÉES A PROPERGOL SOLIDE.

2e THÈSE : L'EFFET POGO DANS LES FUSÉES A PROPERGOL LIQUIDE.

Soutenues le 26 juin 1973 devant la Commission d'examen

MM. FORTIER Président

SIESTRUNCK, BARRERE } Examinateurs

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A LUCILE

Ce travail a été mené de novembre 1967 à mars 1973 à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales dans le cadre des activités de la division "Hautes Températures" de la Direction Scientifique de l'Energétique. Qu'il me soit donc permis de remercier la Direction de l'Office d'avoir accepté que cette thèse fût entreprise et menée à son terme ; ma gratitude va plus particulièrement à Monsieur Barrère, dont l'aide et les encouragements m'ont été d'un grand secours. Je rends également hommage au dévouement des membres du Personnel qui ont contribué à la réalisation matérielle des expériences.

Le sujet a été proposé par Monsieur le Professeur Siestrunck à qui j'exprim ma reconnaissance pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail et les conseils qu'il m'a prodigués. Monsieur le Professeur Fortier a eu la bienveillance d'accepter de faire partie du jury et de proposer le sujet de seconde thèse.

L'étude a fait partie d'un contrat de la Direction des Poudres puis de la Société Nationale des Poudres et Explosifs qui a bien voulu autoriser la publication des résultats.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542715_0004

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ 2

1. INTRODUCTION 3

2. ORIGINE DES PERTES D'IMPULSION SPÉCIFIQUE 6

2,1. Perte chimique 8

2,2. Perte de paroi 10

2,3. Perte par divergence du jet 10

3. ÉTUDE DE LA PHASE CONDENSÉE 12

3,1. Généralités 12

3,2. Détermination expérimentale des caractéristiques de la phase condensée 14

3,3. Etude théorique de la phase condensée 25

3,4. Conclusions 48

4. ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS BIPHASIQUES 49

4,1. Schématisation de la phase condensée 49

4,2. Equations de la phase condensée 50

4,3. Equations de la phase gazeuse 58

4,4. Equations du mélange 61

4,5. Ecoulement d'une suspension dans une tuyère 65

4,6. Formules pour la perte d'impulsion spécifique 78

4,7. Influence d'une stratification de l'écoulement 87

5. ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES DE PAROI 91

5,1. Etude de la couche limite 92

5,2. Formation de la couche condensée 98

5,3. Développement et résolution de la couche condensée 104

5,4. Etude expérimentale des phénomènes de paroi 115

5,5. Perte d'impulsion spécifique due aux phénomènes de paroi 120

6. PRÉVISION DES PERTES D'IMPULSION SPÉCIFIQUE 124

6,1. Estimation théorique 125

6,2. Comparaison des estimations théoriques et des résultats expérimentaux 129

6,3. Possibilités de réduction des pertes 140

7. CONCLUSIONS GÉNÉRALES 147

RÉFÉRENCES 150

PERTES D'IMPULSION SPECIFIQUE DANS LES FUSEES A PROPERGOL SOLIDE

par Paul KUENTZMANN

RESUME

L'écart entre les impulsions spécifiques expérimentale et théorique des propergols métallisés est dû en partie à l'existence d'une phase condensée dans les produits de combustion. L'analyse théorique et l'étude expérimentale de la phase condensée indiquent une forte croissance des particules au cours de leur évolution dans le propulseur. Les équations générales d'un écoulement biphasique sont établies et appliquées à l'écoulement de tuyère ; la perte d'impulsion spécifique due aux échanges irréversibles entre phases est exprimée analytiquement dans quelques cas particuliers. La couche condensée qui se forme sur la tuyère affecte peu la perte de paroi. Les prévisions analytiques de la perte globale d'impulsion spécifique sont comparées avec succès aux mesures réalisées sur propulseur.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Fusée moteur – Fusée à propergol solide – Tuyère de fusée – Echauffement de fusée – Produits de combustion – Dépôts de combustion – Combustion des propergols – Ecoulement multiphase – Ecoulement de tuyère – Ecoulement gaz particules – Dimensions des particules – Balistique interne – Métaux divisés – Alumine – Gouttes.

SPECIFIC IMPULSE LOSSES IN SOLID PROPELLANT ROCKETS

SUMMARY

The discrepancy between experimental and theoretical specific impulses of metallized propellants is partly due to the presence of a condensed phase in combustion products. The theoretical analysis and the experimental study of this condensed phase both emphasize a notable increase in size of the particles during their evolution within the motor. The two-phase flow general equations are established and applied to a nozzle flow ; the loss in specific impulse due to irreversible exchanges between phases is expressed analytically in a few particular cases. The condensed layer forming along the nozzle has little influence on the wall loss. Analytical predictions of the overall specific impulse loss compare well with measurements made on actual rocket motors.

Descriptors (NASA thesaurus) : Rocket exhausts – Rocket propellants – Combustion products – Propellant combustion – Solid propellants – Solid phases – Solid suspension – Metal gas systems – Metal propellants – Metal combustion – Metal particles – Two phase flow – Flow nozzle – Flow distribution – Particles size distribution – Particles collisions – Agglomeration – Internal ballistic – Drop size – Aluminum oxide.

1. INTRODUCTION

Le développement de la recherche aérospatiale au cours des quinze dernières années n'a pu avoir lieu qu'à la suite des progrès effectués dans le domaine de la propulsion chimique. Ce mode de propulsion repose sur des principes physiques simples mais sa mise en oeuvre se heurte à des problèmes technologiques difficiles et met en évidence l'existence de régimes de fonctionnement imprévus, dangereux ou simplement défavorables au point de vue des performances.

Les régimes de fonctionnement instationnaires et périodiques (instabilités de combustion) forment une classe importante de problèmes; les instabilités se manifestent à la fois dans les fusées à propergol liquide, où elles peuvent se coupler aux vibrations structurales et à la réponse instationnaire des canalisations (effet Pogo), et dans les fusées à propergol solide, où l'acoustique de la chambre de combustion joue un grand rôle. Une seconde catégorie de problèmes concerne le régime de fonctionnement permanent ou quasi permanent ; les performances obtenues sont généralement inférieures aux prévisions théoriques. Cet effet connu sous l'appellation de "perte d'impulsion spécifique" est surtout sensible pour les propergols solides et il constitue l'objet de cette étude.

Un propergol solide est constitué du mélange intime de substances énergétiques dont la réaction donne naissance, dans la chambre, à des produits de combustion à haute température. Rappelons que l'on distingue généralement les propergols homogènes ("poudres double base"), où le comburant et le combustible sont fixés sur la même molécule (nitrocellulose, nitroglycérine) et les propergols hétérogènes ou composites, où le comburant et le combustible sont chimiquement distincts. Les propergols composites offrent les performances les plus intéressantes. Aussi cherche-t-on à définir des compositions optimales du seul point de vue énergétique, étant entendu que d'autres considérations interviennent dans le choix final (propriétés mécaniques du propergol, facilité et coût de fabrication, vieillissement et sécurité d'utilisation).

La thermochimie permet de sélectionner les couples de composés ayant le meilleur potentiel énergétique. L'impulsion spécifique, qui représente physiquement la poussée obtenue par unité pondérale du propergol, est le paramètre global le plus intéressant car il tient compte à la fois de l'énergie libérée dans la combustion et de la fraction de cette énergie récupérée dans la détente. Un raisonnement simplifié permet de définir l'influence des différents facteurs sur l'impulsion spécifique [1]. L'étude de la détente isentropique dans une tuyère et dans les hypothèses les plus simples conduit à l'expression de l'impulsion spécifique suivante [2] :

$$I = \frac{1}{g_0}\sqrt{2\bar{C}_p T_0}\sqrt{1-\left(\frac{P_s}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

où T_o est la température des produits de combustion dans la chambre,
p_o et p_s sont les pressions dans la chambre et en sortie de tuyère,
$\overline{\gamma}$ est l'exposant isentropique et $\overline{Cp}$ la chaleur massique (mélange biphasique en équilibre).

$\overline{C_p}\ T_o$ peut être exprimé en fonction de la variation d'enthalpie massique de la réaction à la température de référence T_R :

$$\overline{C_p}\,(T_o - T_R) = -\Delta h_R$$

L'exposant isentropique des produits de combustion est lié à $\overline{C_p}$ par :

$$\frac{\overline{\gamma}-1}{\overline{\gamma}} = \frac{\mathcal{R}}{(1+K)\,\mathcal{M}\,\overline{C_p}}\ ,$$

où $\mathcal{R}$ est la constante universelle des gaz,
M est la masse molaire des produits de combustion gazeux,
K est le rapport des débits massiques des phases condensée et gazeuse.

Pour des conditions de fonctionnement données, on a donc avantage à libérer une énergie importante dans la chambre et à ce que la chaleur massique des produits de combustion, la masse molaire moyenne des produits gazeux et la teneur en phase condensée soient aussi réduites que possible.

L'énergie Δh_R est liée au caractère endothermique des réactions de formation des composants du propergol et au caractère exothermique des réactions de formation des produits de combustion, ces derniers devant en plus être stables à haute température. Du seul point de vue énergétique, une phase condensée et une chaleur massique élevée des produits de combustion limitant la température de combustion et les dissociations, peuvent être favorables. En raison du rôle joué par K et $\overline{C_p}$ sur la fraction de l'énergie récupérée dans la tuyère, la recherche d'un compromis est donc souhaitable et il découle de l'examen des énergies de formation des produits de réaction et des constituants en liaison avec leur masse molaire.

Dans les produits de réaction, les oxydes et les fluorures sont les plus intéressants . L'hydrogène, par H_2O et HF, occupe une position privilégiée en raison de la stabilité et de la faible masse molaire de ces composés. Par ailleurs, les oxydes Be O, Mg O et Al_2O_3 sont caractérisés par une forte exothermicité et apparaissent sous forme condensée dans le domaine de température utile. Les constituants sont à examiner sous l'angle de l'endothermicité et de la masse molaire ; les énergies de liaison doivent être aussi faibles que possible tout en étant compatibles avec la sécurité d'emploi. Les comburants les plus intéressants sont formés à partir de F, O, Cl, N tandis que les combustibles ont intérêt à contenir de l'hydrogène et des métaux légers.

Ces considérations expliquent pourquoi l'introduction d'une charge métallique dans un propergol composite classique (perchlorate d'ammonium + liant plastique, polyvinyle „ polyuréthane ou polybutadiène) relève de façon sensible les performances. L'aluminium est le métal le plus utilisé car ses

propriétés énergétiques sont bonnes et son prix, sous forme pulvérulente, assez modéré.

On s'est aperçu assez tôt que l'accroissement d'impulsion spécifique dû à la charge métallique est toujours inférieur à ce qui est prévu par le calcul. Cet écart peut être caractérisé par un indice global tel que :

$$\eta_I = \frac{I_{exp.}}{I_{Th.}}$$

Le numérateur est déterminé par des essais au banc tandis que le dénominateur est donné par le calcul thermodynamique.

Pour les propergols solides non métallisés, l'indice η_I est de l'ordre de 0,97 alors qu'il est souvent inférieur à 0,93 pour les propergols métallisés. Cette diminution de 4 % de η_I traduit une perte supplémentaire d'impulsion spécifique voisine de 10 s. Or une telle perte, si elle n'est pas prévue, peut compromettre irrémédiablement une mission spatiale ; on peut s'en convaincre en utilisant la formule reliant l'accroissement potentiel de vitesse à la vitesse d'éjection et au rapport de masse.

$$\Delta V \simeq v_s \operatorname{Log} \frac{M_D}{M_V}$$

Pour une charge utile donnée, l'accroissement de vitesse est directement proportionnel à v_s ou I et on sait qu'il doit être contrôlé très précisément, en particulier pour une satellisation. Le calcul montre qu'un écart de 1 s sur l'impulsion spécifique du troisième et dernier étage d'un lanceur se traduit par une chute de l'apogée supérieure à 100 km.

Le problème est donc tout d'abord de prévoir de façon précise les performances d'un engin donné, ce qui ne peut se faire sans qu'une explication soit donnée aux écarts constatés ; il s'agit ensuite d'optimiser la configuration du propulseur afin que ses performances soient maximales.

2. ORIGINE DES PERTES D'IMPULSION SPECIFIQUE

La perte globale d'impulsion spécifique résultant de l'écart constaté entre les prévisions et les valeurs expérimentales, il convient de s'interroger sur les deux termes de la différence.

Les schémas de calcul utilisés sont essentiellement centrés sur l'aspect thermochimique du phénomène et se sont avérés suffisants pour les propergols liquides ou les propergols solides non métallisés. Pour les propergols solides métallisés, on suppose l'équilibre cinétique et thermique des phases condensée et gazeuse.

Pour la détente dans une tuyère, on utilise l'hypothèse d'un écoulement permanent unidimensionnel par tranches. Les programmes de calcul se distinguent par le nombre d'espèces chimiques prises en considération et l'hypothèse retenue pour la vitesse des réactions chimiques. Les relaxations chimiques dans l'écoulement peuvent être introduites dans le calcul, au prix toutefois de difficultés numériques importantes ; aussi cerne-t-on le problème au moyen de calculs effectués dans les conditions extrêmes : détente figée (vitesses de réaction infiniment lentes) et détente en équilibre (vitesses de réaction infiniment rapides). La valeur correcte se situe entre les valeurs calculées dans ces deux hypothèses, elle dépend en réalité du temps de séjour dans la tuyère, et donc de son échelle. Une autre hypothèse : détente figée au col ou à une température donnée est aussi utilisée.

Les valeurs de l'impulsion spécifique calculées pour un propergol type chargé de 16,4 % d'aluminium sont les suivantes : (p_o = 70 atm. p_s = 1 atm.)

détente figée : 257,3 s
détente mixte (figée au col) : 258,4 s
détente en équilibre : 261,6 s

Les grandeurs thermodynamiques à haute température ne sont pas toujours bien connues et les schémas de décomposition de certains composés sont sujets à contreverse : c'est le cas de Al_2O_3 dont l'existence à l'état de vapeur est contestée, des réactions chimiques en phase gazeuse entre Al_2O, Al O, $(Al\ O)_2$ produisant la phase condensée. Ces incertitudes pourraient être à l'origine de légers écarts sur l'impulsion spécifique théorique.

Cependant l'écart maximal entre les différentes valeurs reste de l'ordre de 2 % et pour les petits propulseurs, l'impulsion spécifique expérimentale est ramenée à sa valeur théorique figée. L'incertitude sur l'impulsion spécifique théorique ne peut donc expliquer la perte constatée.

L'impulsion spécifique expérimentale est mesurée au banc : le propulseur

immobilisé est mis à feu et l'on enregistre l'évolution de sa poussée et de la pression de chambre. A partir de ces deux courbes et de la masse consommée, on calcule une impulsion spécifique moyenne et une vitesse caractéristique moyenne. Ces deux grandeurs sont définies à partir des formules établies pour la tuyère isentropique idéale et adaptées à un fonctionnement moyen :

$$I_{exp} = \frac{F}{\dot{m} g_0} \simeq \frac{\int_0^{t_f} F\,dt}{\Delta m\, g_0}$$

$$C^*_{exp} = \frac{P_0 A_c}{\dot{m}} \simeq \frac{\overline{A_c} \int_0^{t_f} P_0\,dt}{\Delta m}$$

La précision de la mesure de ces deux grandeurs sera discutée par la suite. Signalons brièvement qu'en toute rigueur il faut prendre en considération :

- la précision des mesures de la pression et de la poussée instantanées,
- la précision de la mesure de la masse éjectée (combustion d'une partie de l'inhibiteur et des protections thermiques de la tuyère, dépôts dans la chambre et sur la tuyère, imbrûlés),
- les variations de la section du col au cours du tir,
- l'inadaptation de la tuyère, la pression de chambre variant au cours du temps (évolution de la surface de combustion, érosion du col de la tuyère).

En dépouillant finement les essais, on a montré que l'impulsion spécifique expérimentale pouvait être connue avec une précision atteignant 2 °/₀₀. L'écart relatif relevé entre les valeurs théorique (figée) et expérimentale sur de petits propulseurs qui est de l'ordre de 7 à 8 %, soit en vingtaine de secondes, est donc significatif.

Les pertes d'impulsion spécifique des propergols non métallisés sont décomposées de manière classique en pertes élémentaires attribuées chacune à un phénomène particulier. On distingue généralement les pertes suivantes :

- perte chimique

  cette perte correspond au rendement incomplet des réactions chimiques. Il se produit par exemple lorsque le mélange des ergols est imparfait.

- pertes de paroi

  les interactions avec la paroi concernent principalement le frottement et le transfert thermique.

- perte par divergence du jet

  cette perte est liée à la description monodimensionnelle de l'écoulement. Pour un divergent conique, cette perte est estimée par la formule classique [2] :

$$\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Pour les propergols métallisés, on doit examiner en détail l'importance de ces différentes pertes.

2,1. PERTE CHIMIQUE

Remarquons tout d'abord que le comburant et le combustible plastique du propergol étant intimement mélangés dans la matrice du propergol, les réactions chimiques entre ces deux constituants sont susceptibles de se produire avec un excellent rendement. On peut par contre s'interroger sur le rendement de combustion de la charge métallique. Une évaluation de ce rendement a été obtenue par différentes méthodes.

2,1.1. Mesure de la vitesse caractéristique

La théorie isentropique de l'écoulement d'un gaz parfait dans une tuyère permet d'exprimer l'impulsion spécifique par :

$$I = \frac{C^* C_F}{g_0}$$

C* est la vitesse caractéristique :

$$C^* = \frac{P_0 A_c}{\dot{m}} = \frac{\sqrt{r T_0}}{\Gamma(\gamma)}$$

C'est donc une grandeur spécifique de la combustion .

C_F est le coefficient de poussée:

$$C_f = \frac{F}{P_0 A_c} = \Gamma(\gamma)\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{P_s}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad \text{(tuyère adaptée)}$$

C_F caractérise la qualité de la détente dans la tuyère.

On a tenté d'estimer le rendement de combustion en comparant les valeurs théorique et expérimentale de la vitesse caractéristique. La valeur expérimentale est toujours très proche de la valeur théorique, parfois même supérieure. La même constatation est faite pour des lithergols métallisés qui conduisent à une dégradation de l'impulsion spécifique supérieure à celle des propergols solides métallisés (perte d'impulsion spécifique supérieure à 10 %). On serait donc tenté d'admettre que le rendement de combustion est excellent et que la perte d'impulsion spécifique est seulement liée à la dégradation du coefficient de poussée.

En réalité cette analyse est trop simpliste ; d'une part, la mesure de C* est assez imprécise du fait que l'érosion du col de la tuyère est mal connue au cours du tir ; d'autre part, la valeur théorique de C* est très sensible à l'aspect bidimensionnel de l'écoulement dans la région du col, aux pertes de paroi et surtout au caractère biphasique de l'écoulement : en ce qui concerne ce seul point, la phase condensée se traduirait par une augmentation de la vitesse

caractéristique, liée aux échanges irréversibles entre phases et au déplacement de la section sonique vers le divergent [62]. La mesure de la vitesse caractéristique est donc insuffisante pour connaître le rendement de combustion.

2,1.2. Mesure directe du rendement de combustion de l'aluminium

L'analyse de la phase condensée permet de connaître directement la proportion d'aluminium non brûlé. Deux types de dépôts ont été analysés :

- une fraction de la phase condensée se dépose sur la tuyère et est recueillie après tir. Ce dépôt finement pulvérisé peut être traité chimiquement (attaque par l'acide chlorhydrique moyennement concentré); en postulant que l'alumine est totalement insoluble dans l'acide et que le volume gazeux dégagé provient de l'attaque de l'aluminium libre, on trouve que 99 % au moins d'aluminium est sous forme combinée ; ce résultat est en bon accord avec celui de Colucci [3].

- des captations sont réalisées dans le jet pour mesurer la granulométrie de la phase condensée. Les particules captées forment un voile très fin sur les plaquettes de verre et la masse recueillie est extrêmement faible. La méthode d'analyse par diffraction X a donc été retenue. Les particules sont détachées de la plaquette à l'aide d'une lame de rasoir, mélangées à une colle amorphe et la poudre obtenue est étalée en couche mince mais dense. La méthode d'identification (Debye-Scherret) fait apparaître les raies des différentes variétés d'alumine ($\alpha, \delta, \chi, \gamma$ principalement). La raie de l'aluminium est trop faible pour permettre un dosage quantitatif direct. Une méthode de dosage quantitative a été mise au point par comparaison de l'échantillon analysé avec des échantillons de référence composés d'alumine α et d'une faible charge d'aluminium.

Ces résultats permettent d'affirmer que moins de 3 % de l'aluminium est sous forme libre.

On a cherché par le calcul thermodynamique l'influence d'une proportion d'aluminium imbrûlé sur les performances. Il suffit de modifier le programme de calcul en considérant l'aluminium non brûlé comme une espèce inerte possédant les propriétés thermodynamiques de l'aluminium. La figure 1 donne les variations de l'impulsion spécifique et de la vitesse caractéristique avec le pourcentage d'aluminium non brûlé dans les conditions de fonctionnement standard (p_o = 70 atm. p_s = 1 atm.) d'un propergol contenant 16 % d'aluminium. On constate que la perte d'impulsion spécifique due à la combustion incomplète de l'aluminium est au plus de l'ordre de 4 ‰ soit environ 1 s.

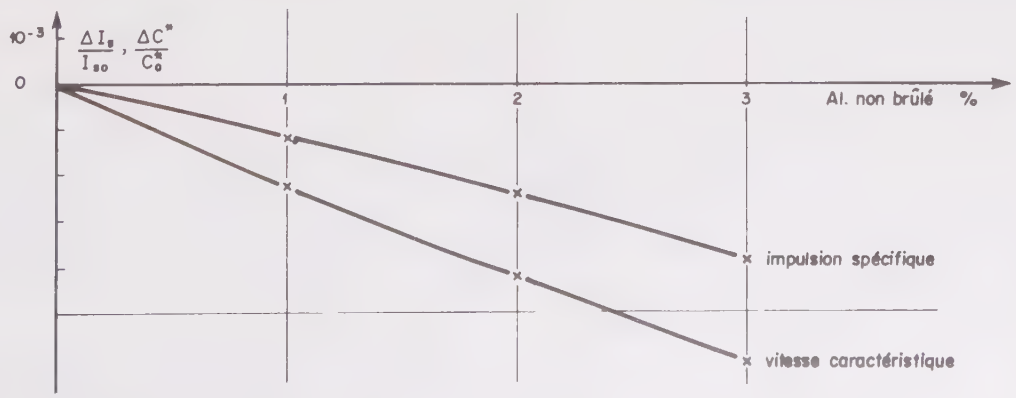


Fig. 1 - Influence du pourcentage d'aluminium non brûlé sur les performances.

2,1.3. Tentative d'amélioration du rendement de combustion

Une détermination indirecte du rendement de combustion a été obtenue par une série d'essais portant sur une configuration particulière de la chambre de combustion. Une grille formée de barreaux de tungstène (seul métal présentant une tenue thermique satisfaisante, à la température de combustion du propergol, vers 3000°C) et placée entre le bloc de propergol et la tuyère est chargée d'augmenter la turbulence dans la chambre et d'intensifier les réactions entre phases ; ce type de dispositif a été utilisé avec succès dans les propulseurs à lithergol. Le gain optimal d'impulsion spécifique est de l'ordre de 1 s.

Ces différentes approches laissent donc supposer que le rendement de combustion est très voisin de 1 et que la perte correspondante, si elle existe, n'est qu'une faible fraction de la perte totale d'impulsion spécifique.

2,2. PERTES DE PAROI

Les pertes de paroi peuvent être, en première approximation, estimées à l'aide des calculs classiques pour les propergols non métallisés. Les propergols métallisés sont caractérisés par une température de combustion très élevée et les tuyères ne sont pas refroidies ; les températures de paroi atteintes sont donc plus élevées et le flux thermique doit rester du même ordre de grandeur. Il en va de même pour le frottement, beaucoup moins sensible que les phénomènes thermiques au niveau de température. Les pertes de paroi sont donc comparables, que les propergols soient métallisés ou non.

Des expériences ont montré que le problème est en réalité plus complexe à cause de la formation sur la tuyère d'une couche d'alumine [3].

2,3. PERTES PAR DIVERGENCE DU JET

La nature du problème est identique que le propergol soit métallisé ou non mais dans le premier cas le calcul est plus compliqué en raison de la répartition non uniforme de la phase condensée dans la phase gazeuse et du mouvement relatif des deux phases. Toutefois, la phase condensée étant plutôt concentrée sur l'axe de la tuyère, la perte ne peut être égale au plus qu'à son expression classique pour un fluide homogène.

Cette rapide discussion conduit à admettre que les pertes classiques sont au plus celles d'un propergol non métallisé, elles ne suffisent donc pas à

expliquer les écarts constatés dont l'origine doit être recherchée dans l'existence d'une phase condensée, caractérisant les propergols métallisés et pouvant correspondre à unefraction massique supérieure à 40 % des produits de combustion.

Les pertes d'impulsion spécifique ont fait l'objet de nombreuses recherches dans les pays qui se sont intéressés à la propulsion chimique, principalement aux Etats-Unis et en Union Soviétique. En France, les premières études ont été entreprises dans le cadre de contrats entre la Direction des Poudres et l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (Direction Energétique).

En raison du grand nombre de phénomènes qui sont à prendre en considétion, de leur complexité et de la diversité des recherches sur lesquels ils débouchent, il n'existe que peu de publications donnant une bonne approche synthétique du problème [4]. Par contre, une littérature abondante est consacrée à certains aspects particuliers ; dans le domaine des écoulements multiphasiques, il faut citer les travaux de Marble [5] et Soo [6]. Quelques chapitres d'ouvrages plus généraux sont aussi consacrés au problème [7].

Au cours de cette étude, de nombreux développements se sont avérés nécessaires dans des directions assez variées. Cette diversité, qui se retrouve dans l'exposé, a conduit à établir une hiérarchie des objectifs. Nous nous sommes fixés comme premier but de dégager les phénomènes les plus importants et d'estimer par des calculs à la fois simples et réalistes l'ordre de grandeur des différentes pertes. Ceci nous a amené d'une part à approfondir certaines bases théoriques et d'autre part à conduire en parallèle la théorie et l'expérience, cette dernière fournissant des données physiques et permettant de vérifier les calculs. Il est apparu assez tôt que des incertitudes subsistent en ce qui concerne la description même de certains phénomènes et que certaines grandeurs sont encore mal connues quantitativement. Le besoin ne s'est donc pas fait sentir de recourir à des calculs numériques importants, mettant en oeuvre des schémas encore sujets à caution et dont la précision aurait été illusoire.

Le plan adopté ici pour exposer les différents résultats obtenus part de l'étude de la phase condensée puisque c'est elle qui joue le rôle essentiel dans les pertes d'impulsion spécifique. Chaque perte est ensuite analysée en supposant qu'elle est indépendante des autres, ce qui est justifié par leur ordre de grandeur, et qu'elle correspond à une petite perturbation dans la détente idéale des produits de combustion. Une récapitulation des résultats permet finalement une confrontation entre les calculs et l'expérience.

3. ÉTUDE DE LA PHASE CONDENSÉE

3,1. GÉNÉRALITÉS

La phase condensée des produits de combustion est formée par l'alumine provenant de la combustion de la charge métallique du propergol. Elle se dépose en partie sur les parois de la chambre et de la tuyère mais se présente dans sa quasi totalité sous forme de très fines particules en suspension dans la phase gazeuse.

Ces particules ont une influence sur tous les phénomènes qui doivent être pris ici en considération. L'écoulement est caractérisé par des échanges entre les phases gazeuse et condensée : échange de masse tout d'abord dû à la condensation de l'alumine, échange de quantité de mouvement lié à l'entraînement des particules par la phase gazeuse, échange thermique enfin. Ces échanges sont de nature irréversible et on peut s'attendre à ce qu'ils affectent sensiblement la détente des produits de combustion. Les particules ne suivant pas exactement les lignes de courant de l'écoulement gazeux dans les zones à fort gradient de vitesse, la phase condensée ne se trouve pas répartie de façon uniforme dans la phase gazeuse et les effets bidimensionnels de l'écoulement en sont modifiés. Une fraction des particules se dépose sur les parois pour former une couche d'alumine qui modifie les phénomènes de paroi et correspond par ailleurs à une perte de la masse éjectée.

Chacune de ces actions nécessite une connaissance locale de la population de particules. Le nombre de particules étant très grand (de l'ordre de 10^{14} pour un kilo de propergol contenant 16,4 % d'aluminium), on doit faire appel aux méthodes statistiques pour représenter cette population. En chaque point de l'écoulement, on peut définir une distribution des particules suivant une ou plusieurs variables qui peuvent être la masse ou une dimension géométrique caractéristique, la vitesse, etc ... La densité de répartition, supposée continue, donne le nombre de particules, par unité de volume du mélange des deux phases, qui possèdent une masse, une vitesse, etc ... comprises dans des intervalles donnés.

Les particules, recueillies à l'extérieur du propulseur, ont une forme sensiblement sphérique. Les particules à l'intérieur du propulseur seront supposées également sphériques bien qu'elles puissent être déformées par de fortes accélérations lorsqu'elles sont liquides. On a également remarqué l'existence de particules exceptionnelles, grosses pour la plupart et en nombre très limité, qui échappent à cette description ; il s'agit le plus souvent d'agglomérats. Les photos des figures 2 et 3 prises au microscope électronique à balayage montrent la quasi sphéricité de la plupart des particules et la large dispersion des particules suivant leur diamètre (de 0,1 à 20 μ dans les conditions expérimentales de nos essais).

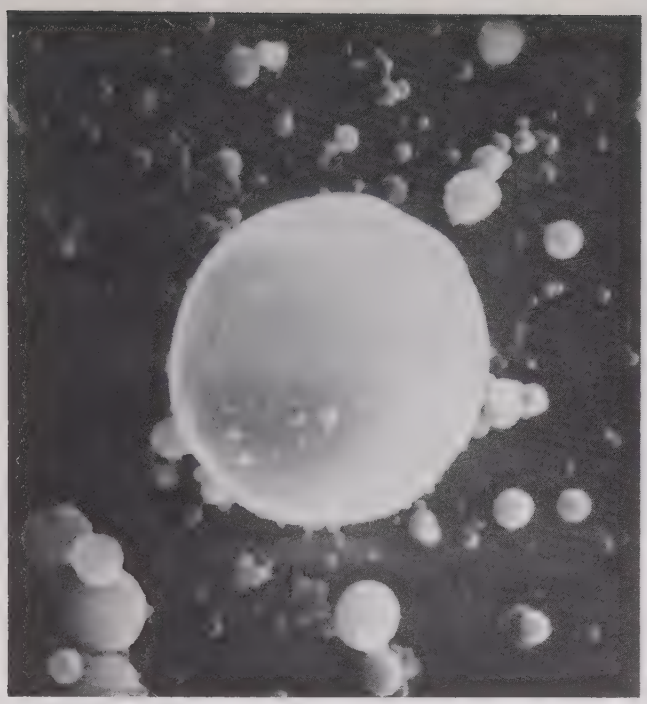


Fig. 2 - Particules recueillies à l'extérieur du propulseur (G = 1500)

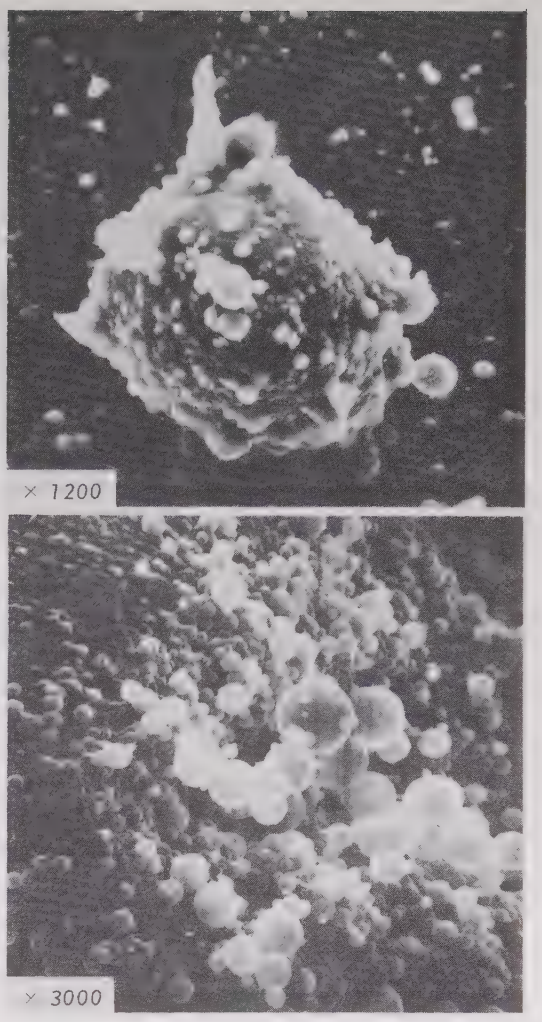


Fig. 3 - Agglomerats recueillis à l'extérieur du propulseur. Vue générale et détail.

L'alumine reste à l'état liquide ($T > 2317°K$) pendant une grande partie de la détente, la solidification ne commençant que dans le divergent de la tuyère. Les particules liquides s'agglomèrent par collisions si bien que la granulométrie de la phase condensée n'est ni uniforme, ni constante. La croissance des particules est également accentuée par la condensation de l'alumine. Le processus de formation des particules, les collisions et la condensation sont à l'origine de la large dispersion des particules suivant leur diamètre.

La phase condensée est donc caractérisée par les trois propriétés suivantes : interaction avec la phase gazeuse, évolution au cours de la détente et large dispersion. Comme la dimension des particules est l'un des paramètres les plus importants pour le calcul des pertes d'impulsion spécifique (on montrera que le diamètre moyen intervient par son carré dans le calcul des pertes dues aux déphasages), on conçoit qu'il faille connaître localement et avec précision la granulométrie de la phase condensée. Cette détermination s'est avérée difficile ; aussi a-t-on fait appel simultanément à l'expérience et aux calculs théoriques.

3,2. DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES CARACTÉRISTIQUES DE LA PHASE CONDENSÉE

La phase condensée des produits de combustion des propergols métallisés a fait l'objet de mesures assez nombreuses, qu'il s'agisse de mesures de vitesse ou de température, de concentration des particules ou de granulométrie. C'est dans ce dernier domaine que les efforts ont été les plus constants, les autres grandeurs étant plus accessibles par le calcul. On a résumé par ailleurs les résultats expérimentaux relatifs à la granulométrie [8]. On se contentera donc de rappeler brièvement ceux obtenus à l'étranger et on insistera sur les moyens mis en oeuvre dans le cadre de cette étude. On mentionnera également les principes de mesure des autres grandeurs.

Les premiers résultats relatifs à la granulométrie de la phase condensée ont été publiés par Brown et Mac Arty [9]. D'autres chercheurs se sont penchés par la suite sur ce problème [10, 11, 12] mais la dispersion des résultats et la divergence des conclusions nous ont conduits à poursuivre les efforts entrepris à l'ONERA depuis 1964 [13].

Les techniques expérimentales peuvent être classées en deux groupes : les techniques directes, d'une part, pour lesquelles des particules sont recueillies et analysées, et les techniques indirectes, d'autre part, où la granulométrie est déduite d'une autre mesure physique.

Les techniques indirectes sont principalement basées sur des mesures optiques. Ces méthodes sont particulièrement séduisantes du fait qu'elles ne perturbent pas l'écoulement et en raison de leurs possibilités potentielles surtout depuis la mise au point des lasers.

Les mesures de Dobbins et Strand [12] ont toutefois mis en évidence un certain nombre de difficultés. La détermination du facteur de transmission monochromatique de l'écoulement fait appel à la théorie de Mie pour la diffusion de la lumière par un nuage de particules. Le calcul est étendu à une distribution de particules et permet le calcul d'un diamètre moyen à condition toutefois de supposer donnée la forme de la fonction de répartition. Cette dernière est encore mal connue, en particulier son caractère bimodal est encore sujet à discussion bien que nous en montrions par la suite l'origine. Cette incertitude explique probablement l'incohérence des résultats signalés pour divers couples de longueurs d'onde.

Il faut d'autre part remarquer que les caractéristiques de l'alumine à haute température, l'indice complexe de réfraction par exemple, sont encore très imprécis. Crabol [14] a montré en particulier que les valeurs des coefficients d'efficacité d'absorption déterminés expérimentalement diffèrent de plusieurs ordres de grandeur de ceux prévus par la théorie de Mie pour le saphir. Enfin les mesures étant généralement conduites sur des jets à symétrie de révolution, il faut tenir compte de la répartition non uniforme de la phase condensée dans la phase gazeuse.

Les méthodes optiques sont aussi utilisées pour la mesure de la vitesse moyenne des particules par l'intermédiaire de l'effet Doppler [15] ; les possibilités offertes par l'holographie [16] pour la détermination simultanée de la vitesse moyenne et de la granulométrie semblent prometteuses. Un spectropyromètre permet de trouver la température moyenne des particules et des mesures d'émission dans l'infrarouge, on déduit la température des gaz. La concentration des particules intervient dans l'étude du rayonnement d'un nuage de particules ; sa détermination

n'est donc pas indépendante de celle de la granulométrie. Ces diverses techniques présentent un caractère fondamental et n'ont pas encore atteint un degré de précision suffisant. Elles sont donc utilisées en complément des mesures directes.

On peut recueillir les particules d'alumine soit en tirant les propulseurs dans un caisson, soit en plaçant un obstacle dans l'écoulement. La méthode du caisson est largement utilisée aux Etats-Unis (Atlantic Research Company, Hercules Powder Company, UTC, JPL) ; elle est limitée à de petits propulseurs et fournit une répartition moyenne de toutes les particules formées pendant le tir et après solidification. Les résultats obtenus sont donc globaux. Des techniques de captation permettant une analyse plus fine du phénomène ont été surtout utilisées dans cette étude.

3,2.1. Moyens expérimentaux

Les obstacles destinés à capter les particules d'alumine peuvent être fixes ou mobiles suivant l'emplacement de captation et les caractéristiques du propulseur, le temps d'exposition étant limité par des impératifs technologiques (tenue thermique principalement) et pratique (nombre de particules recueillies).

Le dispositif le plus simple et également le plus utilisé est un croisillon métallique sur lequel sont disposées des plaquettes de verre de 20 mm x 20 mm. Il est placé en permanence dans le jet lorsque la durée du tir ne dépasse pas quelques secondes et à une distance de la section de sortie de la tuyère généralement assez grande. Ce type de dispositif est représenté sur la figure 4. La disposition des plaquettes sur les bras permet une exploration spatiale du jet.

Lorsque la durée du tir dépasse une dizaine de secondes, ou lorsqu'on désire effectuer la captation au voisinage de la section de sortie, il est nécessaire d'utiliser un dispositif qui ne reste pas en permanence dans le jet. Le dispositif escamotable de la figure 5 a été réalisé. Il comprend un bras porte-plaquettes et un bras protecteur refroidi par circulation d'eau. Une chaîne cinématique, commandée par un tambour d'ordre, permet de présenter les deux bras dans le jet, de relever l'élément protecteur (exposition des plaquettes), puis de l'abaisser avant de relever les deux bras.

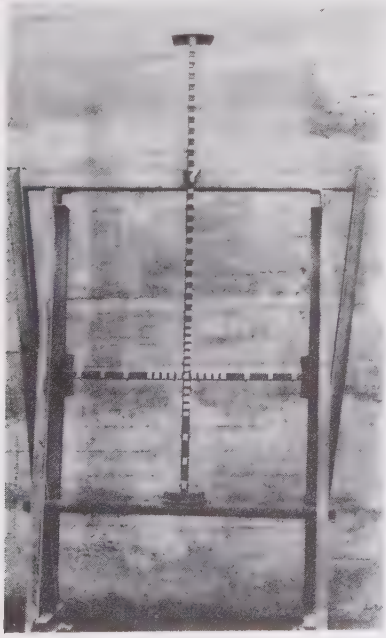


Fig. 4 - Captation sur un obstacle fixe.

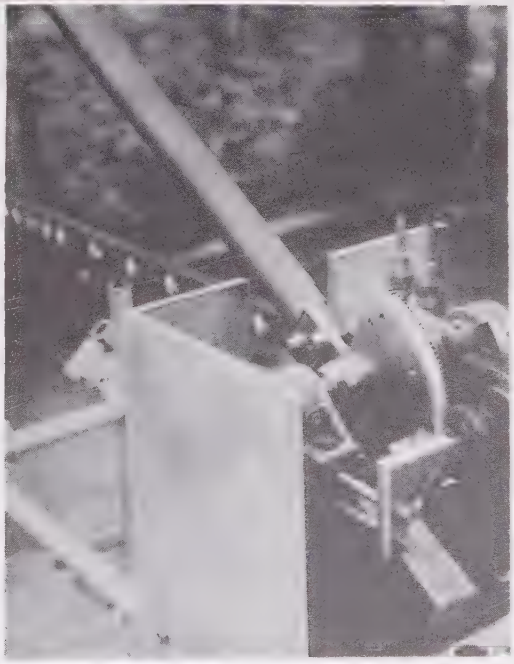


Fig. 5 - Captation sur un obstacle escamotable.

D'autres dispositifs ont été développés pour capter les particules, non plus dans le jet mais à l'intérieur du propulseur. Il s'agit de vérins à double effet dont une extrémité comporte une plaquette de quartz de 6 mm x 6 mm, exposée un temps bref (moins de 0,1 s) dans l'écoulement.

Ce capteur peut être monté soit sur la tuyère, soit sur le fond avant du propulseur (figure 6). La captation n'est possible qu'au voisinage de la paroi en raison de la température de chambre élevée. La commande du vérin, tout d'abord pneumatique, est maintenant pyrotechnique, ce qui permet des temps de sortie et de retrait du capteur plus courts et des temps d'exposition mieux contrôlés.

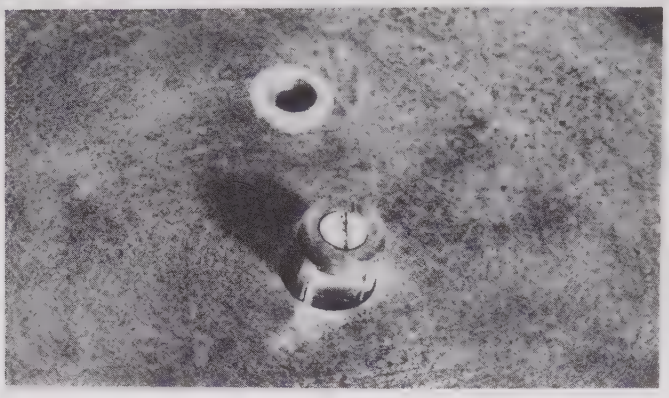


Fig. 6 - Capteur de particules monté sur le fond avant d'un propulseur.

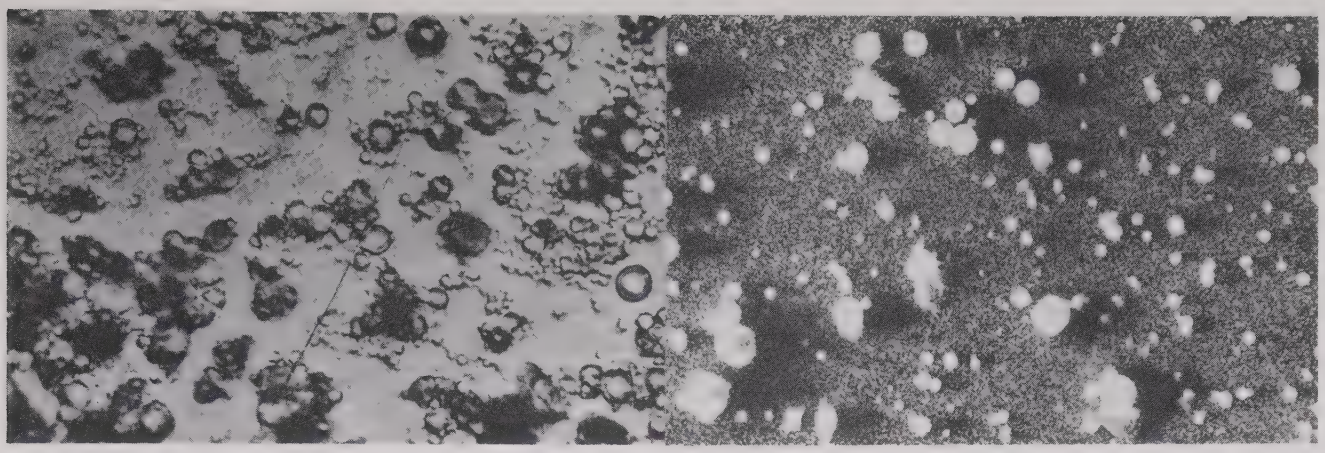
3,2.2. Dépouillement

Que les particules soient recueillies sur les parois d'un caisson ou sur des plaquettes de captation, leur analyse statistique pose les mêmes difficultés.

Les particules recueillies sur les plaquettes forment un voile très fin. Il est possible de les séparer par grattage mais les mesures industrielles de granulométrie (par variation de la résistance d'une suspension de particules dans un électrolyte par exemple) ne peuvent être utilisées en raison de la trop faible dimension des particules. Il faut donc étudier optiquement les particules.

Le grossissement d'un microscope est limité à environ 3000 et la profondeur de champ est alors réduite si bien que les particules de différents diamètres ne sont pas nettes en même temps (figure 7). Le microscope électronique à balayage permet une meilleure définition de l'image et offre de nombreuses possibilités de grossissement. Les plaquettes sont métallisées sous vide (l'épaisseur du dépôt métallique est très inférieure au plus petit diamètre des particules) avant d'être introduites sur la platine du microscope électronique. Des photographies sont prises en chaque point examiné à différents grossissements.

L'analyse automatique des photographies à l'aide d'un calculateur analyseur d'image (Quantimètre 720 de Metals Research) a été tentée. Ce procédé ne s'est pas révélé intéressant, les particules agglomérées et superposées n'étant pas distinguées par le calculateur et faussant complètement la statistique. L'intervention humaine est donc avérée indispensable. Les particules sont classées au moyen d'un appareil du type pied à coulisse ; les informations sont codées sur un ruban perforé, ensuite retranscrites sur bande magnétique et exploitées sur ordinateur.



Photographie prise au microscope. G = 3000 *Photographie prise au microscope électronique. G = 2800.*

Fig. 7 - Particules recueillies sur les plaquettes.

On ne peut établir la statistique sur toutes les particules d'une plaquette car leur nombre est supérieur à 10^4. On se base donc sur un échantillon d'environ 1000 particules. Cet échantillon est le plus souvent relatif aux photographies du centre de la plaquette.

Cette méthode de dépouillement conduit à une incertitude assez forte aux plus faibles et aux plus grands diamètres. Il existe un fond important de petites particules qui sont classées dans un même groupe de diamètre ($d_p < 0{,}5\mu$). Les grosses particules sont en nombre limité et leur probabilité d'apparition dans l'échantillon réduite. Il en résulte une dispersion assez grande des moments d'ordre élevé de la distribution.

3,2.3. Interprétation des résultats

Tout obstacle perturbe l'écoulement et on peut se demander si l'échantillon analysé est bien représentatif de la population de particules. Le problème de la captation de particules par un obstacle est assez classique et il a été abordé assez tôt dans l'aéronautique [17, 18].

Le caractère biphasique de l'écoulement n'est pas en général pris en considération pour le calcul du champ de vitesse de la phase gazeuse: on suppose que les particules sont en nombre suffisamment limité pour ne pas perturber l'écoulement de la phase gazeuse. Dans le champ de vitesse ainsi calculé, le mouvement des particules se réduit à un problème de mécanique du point.

Pour des obstacles rectangulaires tels que ceux utilisés, on est ramené au problème classique de la marche. Si l'on suppose le nombre de Mach suffisamment faible, le fluide peut être considéré comme incompressible ; aux vitesses plus élevées, les calculs deviennent plus complexes et les phénomènes de relaxation biphasique plus importants.

Une transformation conforme permet de trouver analytiquement le champ de vitesse sous forme implicite:

$$X = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{1}{2} \log \frac{(u^2+v^2-1)^2+4v^2}{[(u-1)^2+v^2]^2} + 2u \frac{u^2+v^2-1}{(u^2+v^2-1)^2+4v^2} \right),$$

$$Y = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{Arctg}\ \frac{-2v}{u^2+v^2-1} + 2v\ \frac{u^2+v^2+1}{(u^2+v^2-1)^2+4v^2} \right).$$

Les coordonnées et les composantes de la vitesse sont des grandeurs réduites (fig. 8).

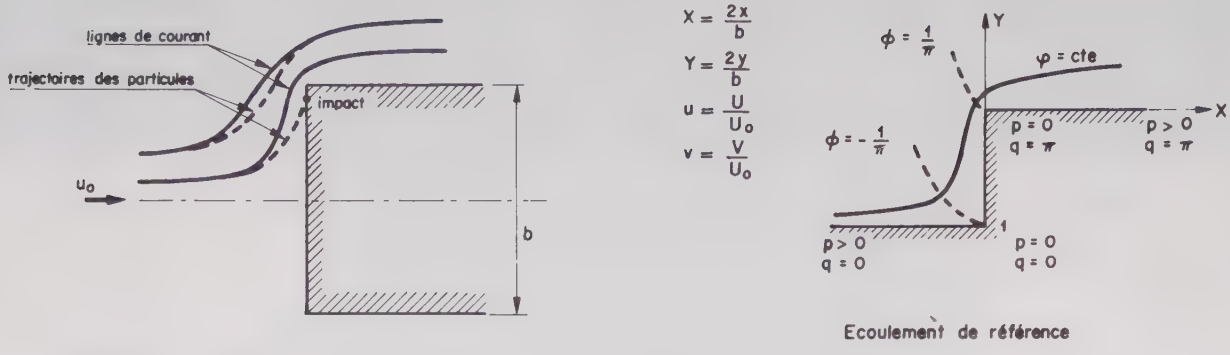


Fig. 8 - Captation des particules par l'obstacle.

Un choix convenable de variables auxiliaires p et q permet de donner les expressions paramétriques :

$$X = -\frac{1}{\pi}(p + \mathrm{sh}\,p \cos q)\ ,$$

$$Y = \frac{1}{\pi}(q + \mathrm{ch}\,p \sin q) - 1\ ,$$

$$u = \frac{\mathrm{sh}\,p}{\mathrm{ch}\,p + \cos q}\ ,$$

$$v = \frac{\sin q}{\mathrm{ch}\,p + \cos q}\ .$$

Les lignes de courant et les lignes potentielles s'écrivent respectivement :

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sh}\,p \sin q = \mathrm{Cte}\ ,$$

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{ch}\,p \cos q = \mathrm{Cte}\ .$$

Les équations du mouvement d'une particule sont, en variables réduites :

$$\frac{du_p}{d\tau} = \frac{C_D\,Re_R}{24}\ \frac{1}{I}\,(u - u_p)\ ,$$

$$\frac{dv_p}{d\tau} = \frac{C_D\,Re_R}{24}\ \frac{1}{I}\,(v - v_p)\ .$$

Dans ces équations, C_D est le coefficient de traînée et Re_R le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la particule et la différence de vitesse entre le fluide et la particule. Le terme $\frac{C_D Re_R}{24}$ caractérise donc le régime de l'écoulement autour de la particule par rapport au régime de Stokes.

Le paramètre I est souvent appelé paramètre d'inertie ; il résume les

conditions de captation:

$$I = \frac{2 U_0 d_p^2 \rho_s}{9 \mu b} = \frac{2 U_0}{b} \tau_u ,$$

où τ_u est la constante de relaxation en vitesse, ρ_s la masse volumique de la particule, μ la viscosité dynamique du fluide.

Une application numérique pour une valeur modérée de la vitesse nous montre que R_{e_R} est inférieur à 1 et que $I \ll 1$. Il est donc légitime d'étudier le problème en régime de Stokes et pour les plus petites valeurs du paramètre I. Une méthode de perturbation est alors bien adaptée au problème.

La position de la particule en chaque point est bien déterminée par les valeur ψ et ϕ correspondantes ou de :

$$Z = \psi \quad , \quad r = -\phi .$$

A l'ordre I, on trouve :

$$\frac{dZ}{dI} = \frac{2I}{\pi} \times \frac{Zr}{\left[\left(\frac{1}{\pi}+r\right)^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{1}{\pi}-r\right)^2+Z^2\right]^{\frac{1}{2}}} .$$

On supposera que l'impact de la particule se produit lorsque la distance de sa trajectoire à l'obstacle devient égale à son rayon ; on admet donc qu'il n'y a ni glissement, ni rebondissement de la particule. On cherche dans ces conditions la relation existant entre la valeur Z_∞ à l'infini amont, le diamètre d_p de la particule, et la distance réduite R du point d'impact à l'axe.

Une méthode d'intégration approchée peut être trouvée et on détermine numériquement la relation $Z_\infty (I, d_p, R)$. Pour les conditions de captation :

$$\frac{d_p}{b} < 10^{-3} ,$$
$$R < 0{,}2 ,$$
$$I \ll 1 ,$$

on a montré que l'expression analytique suivante donne une bonne représentation du phénomène :

$$Z_\infty = \frac{\pi R}{4} \left(\frac{d_p}{b}\right)^{\exp\left(-\frac{\pi}{2} I\right)} .$$

Cette formule peut être appliquée au problème de la correction de la distribution expérimentale de particules recueillies sur les plaquettes. Considérons une zone élémentaire de captation définie par sa position R ($R < 0{,}2$) et son étendue dR. Il lui correspont à l'infini amont une section de captation définie par :

$$dZ_\infty = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_p}{b}\right)^{\exp\left(-\frac{\pi}{2} I\right)} dR .$$

Si l'on admet que les particules de différentes dimensions sont régulièrement réparties à l'infini amont, la densité réelle de répartition suivant le rayon sera déduite de la densité expérimentale par la relation :

$$f(r) = C \frac{f_{exp}(r)}{\left(\frac{2r}{b}\right)^{\exp\left(-\frac{\pi}{2} I\right)}} ,$$

où C est un coefficient de normalisation et où I est proportionnel à r^2.

On constate numériquement que la correction à apporter à la densité expérimentale est surtout importante pour les plus petites particules (d_p de l'ordre de 0,1 μ). L'influence de cette correction est donc uniquement sensible sur les rayons moyens déduits des moments d'ordre peu élevé, c'est-à-dire en pratique les moins intéressants.

On a cherché à vérifier si l'ordre de grandeur du coefficient de correction était exact par le calcul simplifié suivant. Pour une valeur moyenne du rayon, on a cherché le nombre de particules formées au cours d'un tir et le nombre correspondant de particules qui devaient être captées et observées sur la surface d'une plaquette observée au microscope. Le calcul donne un ordre de grandeur de ce nombre de particules tout à fait correct.

La correction nécessite la connaissance de la vitesse avant l'obstacle de captation. La détermination de cette vitesse s'est avérée délicate pour les applications considérées :

- pour la captation interne (convergent de la tuyère), une valeur théorique a pu être utilisée .

- pour la captation externe (jet du propulseur), des impératifs technologiques ont conduit à disposer les appareillages de captation assez loin de la section de sortie de la tuyère (distance de 6 m pour un diamètre de sortie de 60 mm).

La structure du jet est mal connue loin de la tuyère ; la mesure de la vitesse par deux tubes-pitots au centre du jet nous a conduit à admettre que la vitesse est faible et la correction négligeable. L'écoulement est très turbulent dans cette zone ; l'importance de ce phénomène sur le dépôt des particules n'est pas connu.

3,2.4. Résultats

La détermination de la granulométrie des particules d'alumine est nécessaire d'un point de vue fondamental pour préciser l'évolution de la phase condensée dans le propulseur. Par ailleurs, on cherche à expliquer les variations de perte d'impulsion spécifique et la granulométrie apparaît comme une grandeur à mesurer systématiquement. En raison de la charge importante représentée par ces mesures de granulométrie, on ne peut penser réaliser des captations multiples au cours de chaque tir. Les essais ont donc été spécialisés :

- une série d'essais a été plus particulièrement orientée vers les mesures de granulométrie. Les captations ont été réalisées à l'intérieur et à l'extérieur du propulseur.

- les essais où l'impulsion spécifique était mesurée ont comporté systématiquement une captation dans le jet.

Des essais préliminaires ont permis de définir le nombre et la position des plaquettes qui suffisent à déterminer la granulométrie.

3,2.4.1. Présentation des résultats

Toutes les informations sont contenues dans la densité de répartition en fonction du rayon ou du diamètre. Cette donnée est indispensable pour l'étude des collisions par exemple. Par contre, pour d'autres applications, il est utile de caractériser la granulométrie par une ou plusieurs valeurs de rayons ou diamètres moyens, calculés à partir des moments de la loi de répartition.

Le diamètre moyen d_{pq} est défini par l'expression :

$$d_{pq} = \left[\frac{\int_0^\infty \delta^p f(\delta)\, d\delta}{\int_0^\infty \delta^q f(\delta)\, d\delta} \right]^{\frac{1}{p-q}} .$$

Le diamètre médian d'ordre i, d_{mi} est donné par la relation :

$$\int_0^{d_{mi}} \delta^i f(\delta)\, d\delta = \frac{1}{2} \int_0^\infty \delta^i f(\delta)\, d\delta .$$

Différents diamètres moyens ou médians sont utilisés dans la littérature, ce qui rend difficile les comparaisons entre les résultats d'origines diverses. Les plus fréquents sont :

$$d_{10}\ ,\ d_{30}\ ,\ d_{32}\ ,\ d_{43}\ ,\ d_{53} \text{ et } d_{m3} .$$

Le rayon moyen d_{53} est le plus significatif pour les pertes d'impulsion spécifique comme on le verra par la suite.

On cherche souvent à ajuster la loi expérimentale de répartition à des lois analytiques connues. Les plus utilisées sont les lois du type logarithmique ou exponentiel. Ces lois de caractère unimodal apparaissent aujourd'hui assez mal adaptées à notre problème, certains indices semblant montrer que la loi est bimodale. Cependant la précision des résultats est encore insuffisante pour permettre d'utiliser des fonctions analytiques possédant plus de 3 paramètres.

3.2.4.2. Résultats qualitatifs

Quelques observations doivent tout d'abord être faites en ce qui concerne la forme des lois de répartition expérimentales (captation externe).

Cette loi est d'aspect général décroissant et s'étend de 0,1 μ à une dizaine de microns (fig. 9). Quelques incertitudes subsistent aux faibles et fortes valeurs du diamètre.

Une limite inférieure des petites particules est observée ($d_p = 0{,}1\ \mu$). On pourrait être tenté d'attribuer cette limite à un effet perturbateur de la captation. Il est plus logique d'y voir là un effet lié au processus de formation des particules dont la croissance par condensation est d'autant plus rapide qu'elles sont petites. L'allure de la loi de répartition aux très faibles valeurs du diamètre est incertaine. Les lois expérimentales sont en général croissantes alors que les calculs basés sur la croissance dans les collisions donnent une loi décroissante. Cette divergence peut être expliquée soit par les conditions de captation soit du fait que la théorie ne tient pas compte d'un diamètre maximal des particules. Elle est de toute façon de peu d'importance car elle intervient de façon négligeable dans les calculs des moments d'ordre élevé.

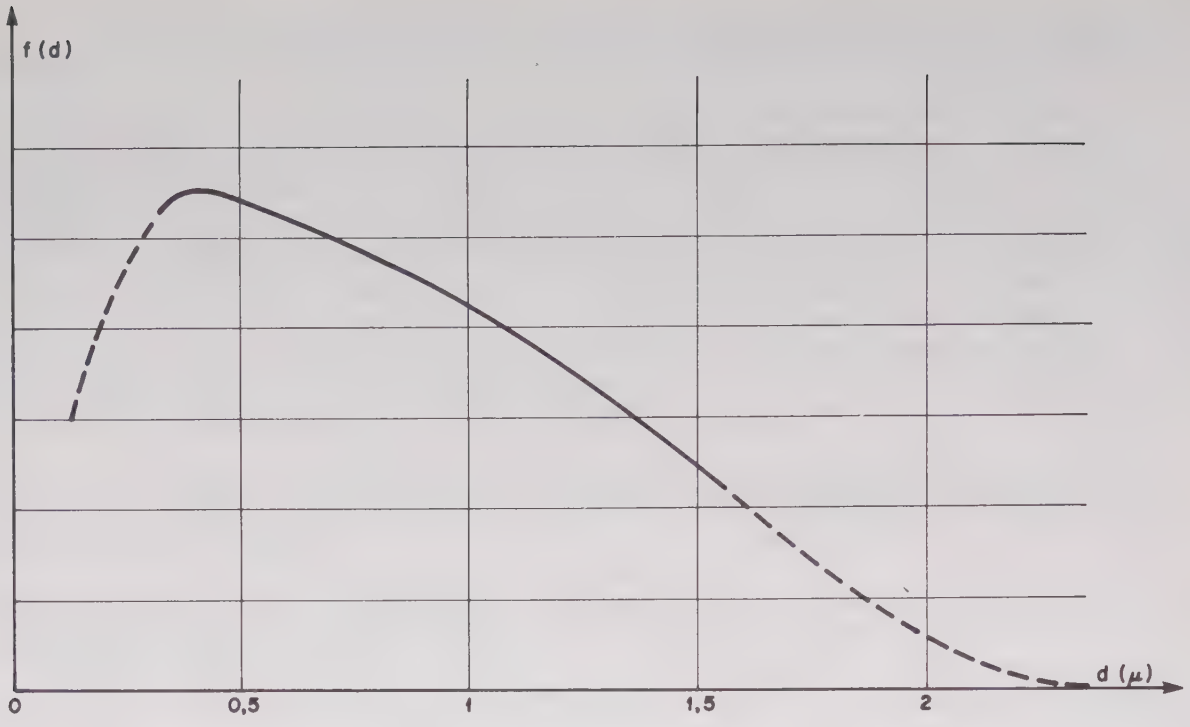


Fig. 9 - Exemple de loi expérimentale de répartition des particules suivant leur diamètre (captation externe).

La statistique pour les grosses particules est imprécise. L'existence de particules dont le diamètre est de l'ordre de 10 μ a été observée expérimentalement et une explication théorique a été proposée (voir chapitre 332). Ces particules n'apparaissent que de façon aléatoire dans les statistiques en raison de la taille des échantillons étudiés. Les moments d'ordre élevé et les rayons moyens correspondants sont donc forcément imprécis. Il apparaît par conséquent nécessaire de développer des techniques d'analyses adaptées à cette classe de particules.

La croissance des particules au cours de leur évolution dans le propulseur est un phénomène d'une importance primordiale et qui n'a fait l'objet que de rares vérifications expérimentales, les schémas de calcul théoriques étant par contre plus nombreux. Cette disparité des efforts tient aux difficultés des mesures et de leur interprétation. Les essais que nous avons réalisés prouvent la réalité du phénomène et donnent, malgré leur relative imprécision, un début d'estimation quantitative.

Le tableau suivant présente les résultats les plus caractéristiques ($\Phi_c = 15$ mm, $p_o = 70$ b) :

CAPTATION	FOND AVANT	CONVERGENT	EXTERIEUR
d_{10} μm	0,35	0,54	0,90
d_{30} μm	0,40	0,60	1,17
d_{53} μm	0,63	0,75	3,90

Les mesures du fond avant sont plus significatives que celles de la tuyère. Les particules qui sont encore liquides dans ces deux zones sont partiellement écrasées sur la plaquette du capteur de convergent en raison de la vitesse amont dont elles sont animées.

3,2.4.3. Résultats quantitatifs

Les résultats présentés ici sont limités à ceux obtenus dans le cadre de cette étude. Pour la bibliographie des résultats étrangers on consultera la référence [8]. Les plaquettes analysées sont celles correspondant à une captation externe ; les valeurs données sont donc représentatives de l'état final de la phase condensée, après solidification.

Pour chaque essai, une dizaine de plaquettes sont analysées et des moyennes sont effectuées pour l'ensemble des plaquettes. Le diamètre moyen donné est d_{32} pour permettre une comparaison avec les résultats étrangers. On a établi statistiquement la relation :

$$d_{53} = 1{,}86\ d_{32}\ .$$

On a tout d'abord cherché l'influence de la position des plaquettes sur la granulométrie des particules. Ces résultats sont résumés sur la figure 10. On a choisi les plaquettes disposées sur les bras horizontaux du croisillon de captation. d_{32} croît avec la distance de la plaquette à l'axe du jet ce qui est lié à l'existence de grosses particules plus nombreuses. Les moyennes présentées par la suite portent sur les plaquettes situées à moins de 20 cm de l'axe du jet et qui semblent les plus représentatives.

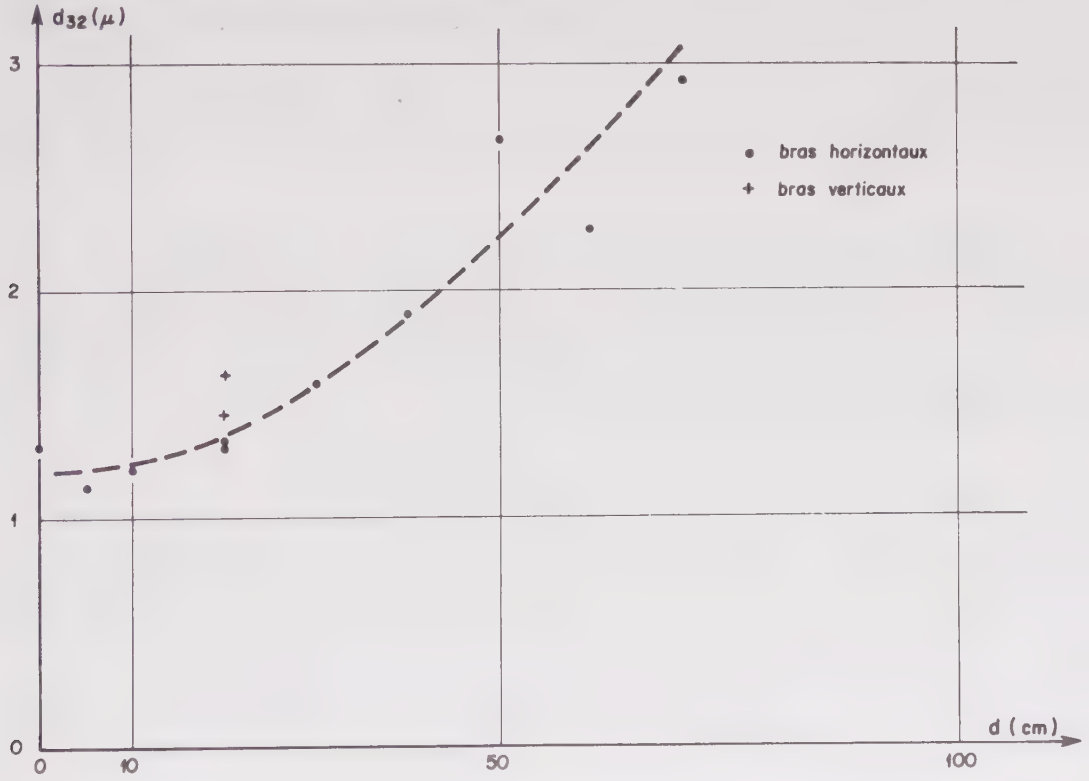


Fig. 10 - Influence de la position de captation sur le diamètre moyen des particules.
(ϕ_c = 30 mm - D = 6 m - P_o = 40 b)

INFLUENCE DE LA NATURE DU PROPERGOL

Les résultats de la littérature indiquent que la granulométrie de la phase condensée est indépendante de la composition du propergol, de la teneur en aluminium, de la granulométrie de l'aluminium ou du perchlorate d'ammonium. Les conclusions sont contradictoires en ce qui concerne l'influence de la teneur en aluminium. Nos essais ont porté sur la comparaison de deux propergols de compo-

sition pondérale identique (perclorate d'ammonium-aluminium-liant polyuréthane) mais différant par la granulométrie et la provenance de l'aluminium. Un écart de 9 % sur d_{32} a été constaté ; il est corroboré par une écart sur l'impulsion spécifique. Ce résultat montre que chaque type de propergol doit être étudié au point de vue de sa phase condensée.

INFLUENCE DE LA PRESSION DE FONCTIONNEMENT

L'influence de la pression de fonctionnement n'est pas encore clairement établie. Nos essais, sur petits propulseurs ont mis en évidence une variation modérée de d_{32} avec p_o (figure 11). Cet effet est en bon accord avec les conclusions de Dobbins et Strand [12].

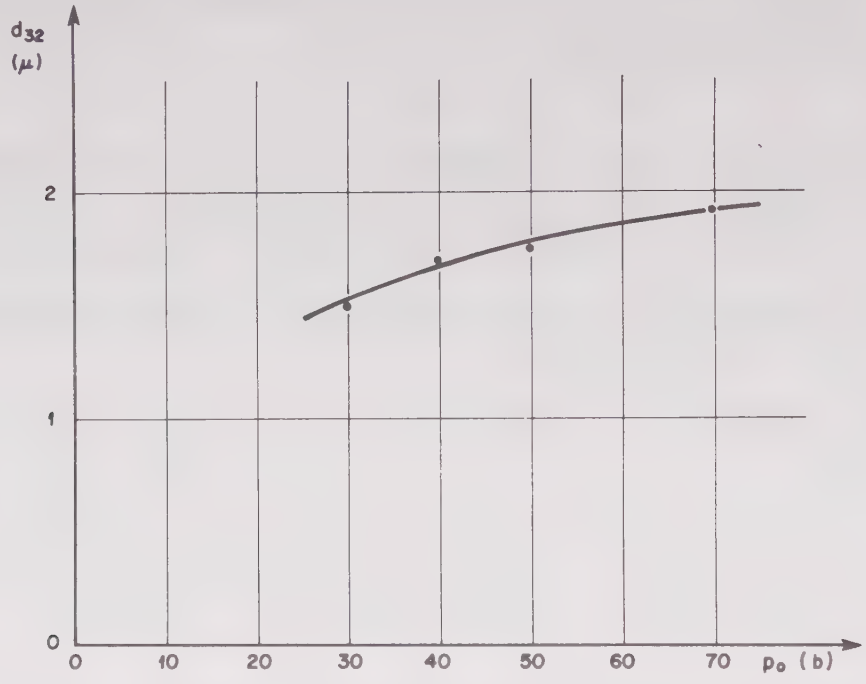


Fig. 11 - Influence de la pression de fonctionnement sur le diamètre moyen des particules (ϕ_c = 20 à 30 mm).

INFLUENCE DE L'ECHELLE DU PROPULSEUR

La littérature indique une croissance importante de la phase condensée avec l'échelle du propulseur, d_{32} atteignant 9 μ pour ϕ_c = 100 cm. Nos essais n'ont pas permis de noter une influence notable de la taille du propulseur lorsque ϕ_c varie de 1,5 à 3 cm. Au delà de ces valeurs, une collaboration avec d'autres organismes devra être envisagée.

INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DU PROPULSEUR

Les essais ont principalement porté sur l'influence de la géométrie de la tuyère. Pour une tuyère biconique donnée dont on fait varier l'angle du convergent et le rayon de courbure du col, aucune variation du diamètre moyen ne se manifeste. Par contre lorsque le rapport d'entrée de la tuyère diminue ou lorsque l'intégration de la tuyère dans le propulseur augmente, le diamètre d_{32} s'élève (la proportion de grosses particules augmente). Cette augmentation de la granulométrie est corrélée par un accroissement des pertes d'impulsion spécifique.

3,2.5. Conclusions

La détermination expérimentale de la granulométrie de la phase condensée s'avère donc difficile et relativement imprécise du fait de la large dispersion des diamètres de particules, de leur croissance au cours de la détente et de leur répartition irrégulière dans l'écoulement.

Les mesures effectuées ont cependant permis de prouver la réalité et l'importance de la croissance des particules et de proposer des valeurs pour le diamètre moyen final des particules qui semblent sensiblement plus réalistes que celles trouvées dans la littérature étrangère. Ces mesures devraient faire l'objet d'améliorations et apparaissent un intermédiaire indispensable lors de la mise au point d'un propulseur.

Les données recueillies étant, malgré ces efforts, trop fragmentaires pour être reliées quantitativement aux pertes d'impulsion spécifique, on a cherché par le calcul à prévoir l'évolution de la phase condensée.

3,3. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA PHASE CONDENSÉE

La phase condensée doit être connue en chaque point du propulseur tant sur le plan de la concentration locale des particules que sur le plan de leur répartition en diamètre. L'étude de ces caractéristiques est, en principe, indissociable de celle de l'écoulement. On peut cependant, dans certaines conditions qui seront précisées par la suite, déterminer le mouvement des particules et leur croissance sans tenir compte de la phase gazeuse. Cette approximation permet de donner une première représentation du phénomène.

Les mécanismes en jeu apparaissent suffisamment variés pour que l'on distingue les différentes zones du propulseur. La perte d'impulsion spécifique intéresse surtout la tuyère; les premières études ont donc été menées pour ce type d'écoulement et il est apparu indispensable de connaître les caractéristiques de la phase condensée dans la section d'entrée. Aussi a-t-on été amené à étudier le phénomène dans la chambre puis la formation des particules dans le processus de combustion. Nous suivrons ici les particules dans leur évolution en résumant un certain nombre de résultats publiés par ailleurs [19, 20].

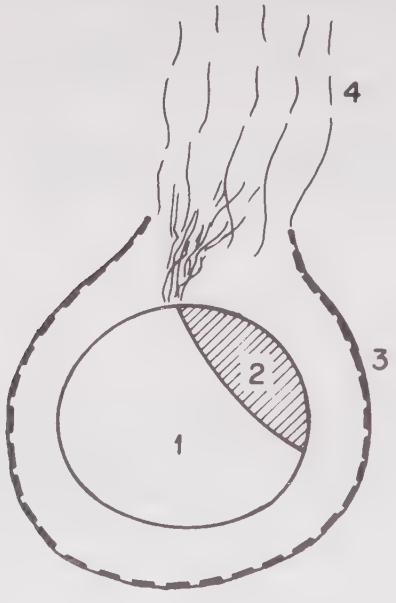
3,3.1. Influence relative des différents phénomènes

Le développement des particules est le résultat d'un ensemble de phénomènes dont il faut estimer l'importance avant d'établir un schéma de calcul.

Il faut étudier en premier lieu le mécanisme de la combustion des particules d'aluminium du propergol et la formation des particules d'alumine. Un grand nombre d'études fondamentales ont été consacrées à la combustion de particules mais elles ont été plus orientées vers l'aspect cinétique de la combustion que vers l'étude des produits de combustion [13, 21]. Les indications qualitatives intéressantes peuvent cependant être déduites des résultats obtenus à l'ONERA par cinématographie ultra-rapide de la surface de combustion de propergols solides. On note les particularités suivantes (figure 12) :

- la combustion se produit essentiellement en phase vapeur (diffusion des espèces comburantes et combustibles) et dans la zone de flamme apparaissent de très fines particules d'alumine. Ces particules peuvent former des bulles très minces disymétriques du fait du mouvement, présentant une longue queue et que l'on peut recueillir en figeant brutalement la combustion. Ces bulles peuvent exploser spontanément.

- sur la particule d'aluminium existe une zone plus brillante en forme de calotte que l'on suppose être formée d'alumine, cette alumine résultant d'une oxydation superficielle de l'aluminium pendant la période de chauffage de la particule précédant l'allumage, et également d'une combustion hétérogène au voisinage de la calotte.



1 - particule d'aluminium
2 - calotte d'alumine
3 - couche d'alumine
4 - sillage de fines particules d'alumine

Fig. 12 - Combustion d'une particule d'aluminium d'un propergol solide.

Trois mécanismes interviennent simultanément à ce stade du développement des particules d'alumine : la formation de noyaux condensés, la croissance de ces noyaux par dépôt de nouvelles molécules d'alumine et l'agglomération des particules par collision. Par la suite seuls subsistent les deux derniers mécanismes.

Le modèle le plus simplifié pour prévoir le rayon et la vitesse d'apparition des noyaux est celui de la gouttelette liquide (nucléation homogène). Il existe une valeur limite du rayon au-dessus duquel le noyau, formé par les fluctuations en phase vapeur, est stable et peut continuer à croître ; l'expression la plus couramment utilisée est celle de Kelvin :

$$r^* = \frac{2\sigma M}{\rho_e R T \log \frac{P}{P_\infty}},$$

où $\mathcal{M}$ est la masse molaire du gaz et $\mathcal{R}$ la constante universelle, σ et ρ_ℓ la tension de surface et la masse volumique du liquide, T la température et p et p_∞, les pressions partielles de vapeur du liquide pris en gouttelettes et en masse. r^* est toujours voisin d'une centaine d'Angstroms donc très inférieur au rayon des particules observées expérimentalement.

Le nombre de noyaux formés par unité de temps et de volume est donné par des expressions du type :

$$I = K \exp\left(-\frac{W}{kT}\right),$$

où W est le travail de formation du noyau, k la constante de Boltzmann et K un facteur lié à la fréquence des collisions moléculaires.

Le terme exponentiel apparaît très sensible à la température ce qui explique que lors de la détente d'une vapeur, la condensation se produise très brutalement.

La croissance des noyaux se produit pour nos conditions (caractérisées généralement par une pression élevée) en majeure partie dans le domaine continu (nombre de Knudsen $\ll 1$) où elle est contrôlée par la diffusion des espèces et en particulier des espèces condensables. On doit noter à ce sujet que l'existence de l'alumine en phase vapeur n'est pas prouvée, l'alumine se formerait par l'intermédiaire de réactions intéressant les autres composés de l'aluminium, les chlorures principalement. Pour tenir compte de cette incertitude, on définit une pression partielle fictive de l'alumine en phase vapeur. Le calcul thermodynamique permet de trouver en fonction de la température la proportion d'alumine liquide à l'équilibre : près de 80 % de l'alumine est condensée dans la chambre ($\sim$3300°K) ; la condensation se poursuit dans la tuyère pour se terminer avant la solidification de l'alumine ($\sim$2300°K).

Nous avons établi dans la publication [19], la loi de croissance des particules par condensation en raison du manque de clarté de la littérature en ce qui concerne les hypothèses utilisées ou la conduite des calculs. Les équations sont écrites pour l'approximation de Zvab-Zeldovitch [22] : mécanisme stationnaire, absence de forces de viscosité et de forces de distance, pression constante, insensibilité de la diffusion au gradient thermique, nombre de Levis égal à 1. On aboutit ainsi à deux équations, l'une de continuité pour la vapeur, l'autre pour l'énergie qui dans ce problème à symétrie sphérique s'intègrent simplement et le raccordement des pressions conduit à l'expression de la vitesse de croissance :

$$r\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{r^*}{r}\right) \frac{\lambda}{c_{pf}\rho_\ell} \frac{\operatorname{Log}\dfrac{P_{1\infty}}{P_{v1}(T_\infty)}}{\dfrac{P_{\infty} - P_{1\infty}}{P_{1\infty}}\left[\dfrac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1} + \left(1 - \dfrac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1}\right)\dfrac{P_{1\infty}}{P_\infty}\right] + \dfrac{L^2}{r_1 c_{pf} T_\infty^2}},$$

où l'indice 1 est réservé à la vapeur condensable et l'indice 2 à l'espèce inerte.

Lorsque le rayon est très supérieur au rayon critique, on retrouve la loi classique en r^2. Gyarmathy [23] propose d'étendre cette formule au régime moléculaire en remplaçant dans le second membre r par $r + \alpha\ell$, où ℓ est le libre parcours moyen et α un coefficient numérique.

Les collisions sont induites par plusieurs phénomènes ; lorsque les particules sont très petites, elles possèdent un mouvement brownien. Ce mouvement devient vite négligeable lorsque le rayon dépasse 0,05 μ. Les autres phénomènes sont d'origine aléatoire (tourbillons) ou organisée (champ acoustique ou accélé-

ration de l'écoulement). On cherche à décrire ces différents modes de collisions d'une manière unique en définissant une fonction de collisions. Appelons $f(m)$ la fonction de répartition des particules suivant la masse par exemple. La fréquence des collisions, pour les deux classes de particules $(p, p+dp)$ et $(q, q+dq)$ est présentée sous la forme :

$$f(p)f(q)\,\Phi(p,q)\,dp\,dq\,.$$

Dans l'écriture de la fonction de collisions Φ, apparaissent uniquement les masses des particules considérées mais il est évident que d'autres variables tiennent implicitement compte du mécanisme des collisions et des conditions locales ; on cherche à faire apparaître ces dernières variables sous forme de coefficients. Jenkins et Hoglund [24] donnent ainsi :

- pour le mouvement brownien :

$$\Phi(p,q) \text{ proportionnel à } 2+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}},$$

- pour la diffusion turbulente :

$$\Phi(p,q) \text{ proportionnel à } \left(p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

- pour les collisions d'origine acoustique :

$$\Phi(p,q) \text{ proportionnel à } \left(p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\left|p^{\frac{2}{3}}-q^{\frac{2}{3}}\right|.$$

Pour les collisions dues aux accélérations de l'écoulement on montre aisément en proche équilibre (voir chapitre 334) que $\Phi(p, q)$ est proportionnel à $\left(p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)^2\left|p^{\frac{2}{3}}-q^{\frac{2}{3}}\right|$.

A chacun des phénomènes qui viennent d'être mentionnés correspond un temps caractéristique et la comparaison des différents temps permet de définir le phénomène prépondérant dans chaque zone du propulseur. La production de noyaux est quasi instantanée et devient rapidement négligeable.

Pour la condensation dans le domaine continu, l'équation de bilan pour l'espèce condensable s'écrit :

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -4\pi n_p \rho \mathcal{D} r F(\rho_\infty, p_{1\infty}, T_\infty),$$

où n_p est le nombre de particules par unité de volume et $\mathcal{D}$ le coefficient de diffusion binaire. Au voisinage de l'équilibre et pour une grande dilution de l'espèce condensable, l'expression de F peut être simplifiée en :

$$F \simeq \frac{\rho_1 - \rho_{v_1}(T_\infty)}{\rho}$$

La constante de temps est donc :

$$\tau_c = \frac{1}{4\pi n_p \mathcal{D} r} = \frac{r^2 \rho_e^2}{3K\rho\mathcal{D}}$$

Marble [25] a montré que le temps caractéristique de la condensation dans le domaine moléculaire est très inférieur à τ_c .

Pour les agglomérations dans la chambre, on montrera par la suite qu'il y a intérêt à utiliser une fonction de collision de la forme :

$$\Phi(p,q) = \beta(p+q)$$

Le nombre de particules est alors exprimé par la relation :

$$\frac{n_p}{n_{p_0}} = \exp(-\beta \rho_p t)$$

La constante de temps sera donc définie par l'expression :

$$\tau_A = \frac{1}{\rho_p \beta}$$

Pour les agglomérations dans la tuyère dues à l'accélération de l'écoulement, on peut utiliser la quantité déjà mentionnée :

$$\tau_u = \frac{2r^2 \rho_e}{9\mu}$$

On constate que τ_c et τ_u sont du même ordre de grandeur : la condensation et le déséquilibre biphasique entre phases doivent être étudiés simultanément. Dans la chambre, τ_A peut être calculé pour une variation raisonnable du rayon moyen en volume et une limite supérieure de τ_c peut être proposée ; τ_A est toujours plus grande que τ_c , ce qui indique que les agglomérations constituent le phénomène le plus important dans la chambre. Ces temps caractéristiques sont toujours inférieurs aux temps de séjour moyens dans la chambre et dans la tuyère, les phénomènes correspondants ont donc le temps de s'y développer.

Ces considérations générales permettent d'aborder l'étude des différentes zones du propulseur.

3,3.2. Etude de la zone de combustion

Cette zone est un milieu fortement hétérogène tant à cause de l'existence de phases condensées que du fait de l'existence de fortes variations de la température et des concentrations. Il n'existe pas à notre connaissance de modèle théorique tenant compte de tous les phénomènes et en particulier de la formation et de la croissance des particules. On peut cependant avancer un certain nombre d'observations permettant de circonscrire ce problème.

a) Etendue de la zone de combustion

L'étude de certains mécanismes de combustion, étude de la vitesse de combustion par exemple, est menée sur des chambres à voyant (figure 13). Au voisinage de la surface de combustion, une zone très lumineuse est observée, dont l'épaisseur varie d'une manière caractéristique pour les propergols métallisés (figure 14). Nous allons montrer que cette zone correspond à la combustion des particules en étudiant leur mouvement.

L'écoulement des produits de combustion est caractérisé par des gradients de vitesse assez importants et des particules en cours de combustion dont le diamètre initial atteint 100 μ. Comme pour bon nombre d'écoulements diphasiques, on définira un écoulement de référence et on étudiera la trajectoire des particules dans le champ de vitesse calculé. Dans le cas d'un canal à section constante, l'écoulement le plus simple correspond au mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible. Dans le cas plan, on obtient :

$$u = v_0 \frac{x}{H} \qquad v = -v_0 \frac{y}{H}$$

avec les notations de la figure 14 et v_o correspondant à la vitesse d'injection à la paroi.

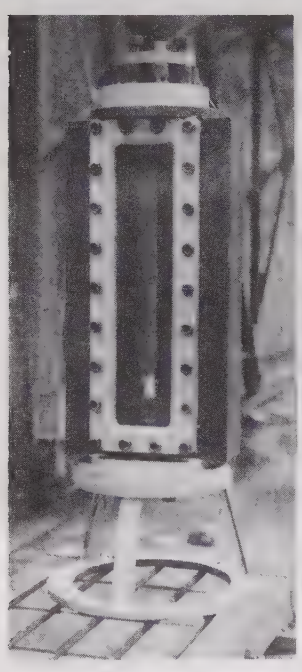


Fig. 13 - Propulseur à voyant.

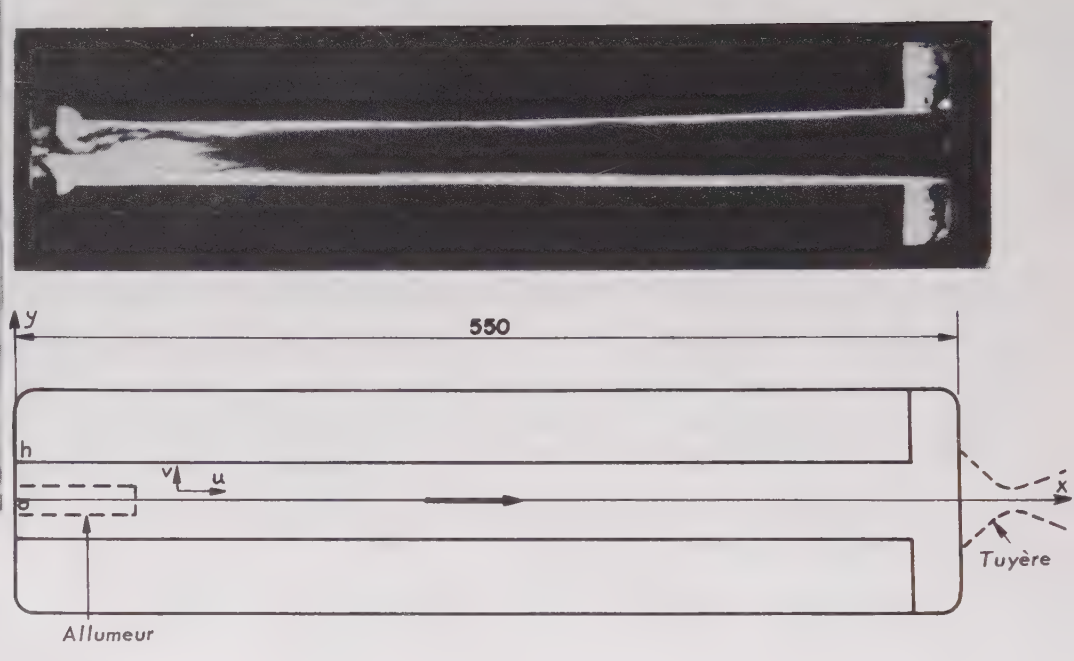


Fig. 14 - Visualisation de la zone de combustion.

En admettant que l'écoulement autour des particules a lieu dans les hypothèses de Stokes, et que les particules brûlent dès le départ de la surface de combustion suivant une loi en r^2, on peut établir assez simplement les équations différentielles donnant en fonction du temps la position de la particule. Des changements de variables ramènent ces équations à des équations de Bessel. On peut donc donner les solutions sous la forme :

$$\frac{x_p}{x_{p_o}} = A z^\nu I_\nu(\sqrt{b}z) + B z^\nu K_\nu(\sqrt{b}z),$$

$$\frac{y_p}{h} = C z^\nu J_\nu(\sqrt{b}z) + D z^\nu Y_\nu(\sqrt{b}z),$$

où $\quad \nu = \frac{1+\alpha}{\alpha}$,

$$b = \frac{4\tau_{u_o} v_o}{h\alpha^2},$$

$$z^2 = 1 - \alpha\frac{t}{\tau_{u_o}},$$

$$\alpha = k_c \frac{\tau_{u_o}}{d_{p_o}^2},$$ k_c étant la constante de combustion.

En tenant compte des conditions initiales on détermine les coordonnées du point où cesse la combustion :

$$\frac{x_{pf}}{x_{p_o}} = \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{(\sqrt{b})^{\nu-1}} I_{\nu-1}(\sqrt{b}), \quad \frac{y_{pf}}{h} = \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{(\sqrt{b})^{\nu-1}} J_{\nu-1}(\sqrt{b}).$$

On remarquera que $\nu - 1$ est indépendant de la dimension de la particule, tandis que $\sqrt{b}$ est proportionnel au diamètre initial :

$$\nu - 1 = \frac{18\mu}{k_c \rho_{Al}}$$

$$\sqrt{b} = \frac{2}{k_c}\sqrt{\frac{v_0 \rho_{Al}}{18\mu h}}\, d_{p_0} .$$

Pour des valeurs numériques raisonnables tirées de la littérature (en particulier $1{,}25 \times 10^{-3}$ cm^2/s $< k_c < 3{,}75 \times 10^{-3}$ cm^2/s [21]), on calcule en partant de la frontière de la zone lumineuse le diamètre initial moyen des particules en chaque point de la surface de combustion. Ce résultat est représenté sur la figure 15. La décroissance de dp_0 avec l'abscisse x est à relier à l'influence de l'écoulement qui désintègre les plus gros agglomérats. L'ordre de grandeur du diamètre aux faibles valeurs de x est en bon accord avec les observations expérimentales.

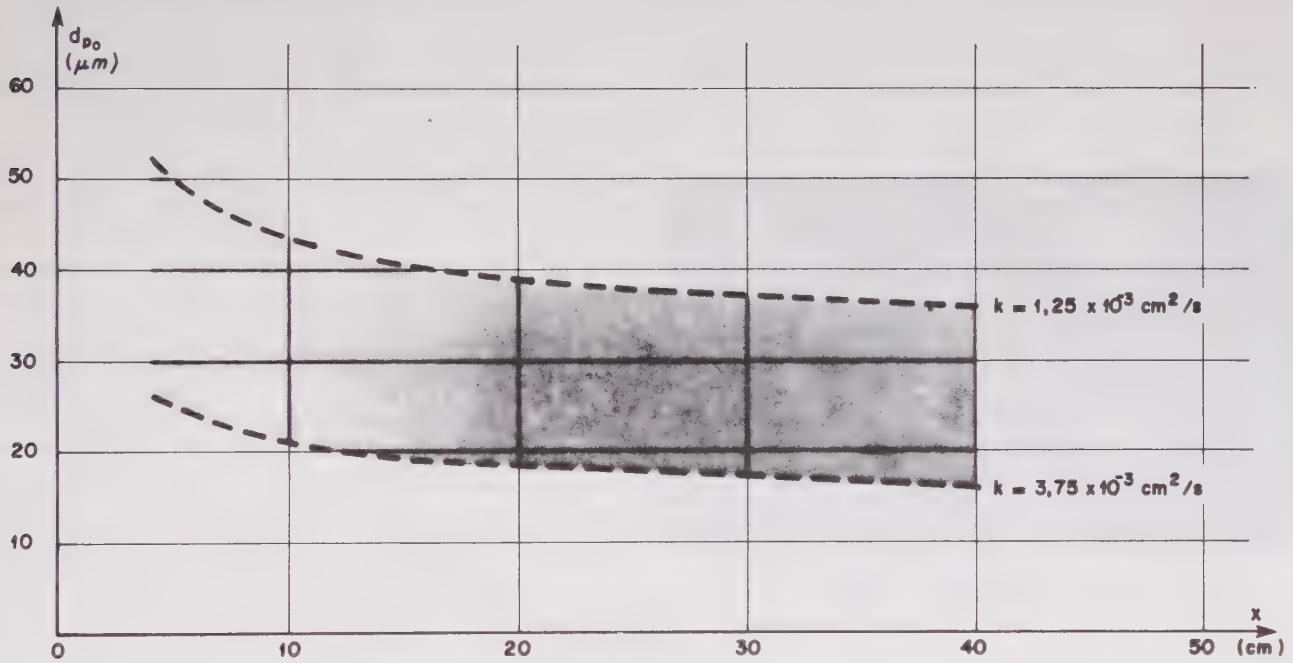


Fig. 15 - Diamètre moyen des particules d'aluminium sur la surface de combustion.

La zone lumineuse observée est donc bien la zone de combustion. Cette zone est peu épaisse compte tenu des dimensions du propulseur à voyant, elle sera négligeable dans le cas d'un propulseur réel si bien que le problème initial se ramène à celui de la connaissance de la répartition des particules d'alumine à la surface de combustion.

b) Répartition des particules

Les particules d'alumine sont formées très tôt en phase vapeur et leur croissance dans le domaine raréfié est très rapide si bien qu'il n'existe pas de particules dont le diamètre est inférieur à 0,01 μ. Cette valeur correspond bien aux mesures de Caruso [26] et aux résultats des captations effectuées au fond avant d'un propulseur.

De grosses particules proviennent de l'alumine qui se rassemble sur les particules d'aluminium en combustion. Nous avons estimé leur diamètre moyen à

partir de photographies telles que celles de la figure 16a en calculant le volume relatif de l'alumine par rapport à celui de l'aluminium.

Les deux liquides étant supposés non miscibles, on écrit l'équation d'équilibre de la surface interne et de la ligne commune aux trois milieux :

$$\frac{\sigma_{10}}{R_{10}} - \frac{\sigma_{20}}{R_{20}} + \frac{\sigma_{12}}{R_{12}} = 0 ,$$

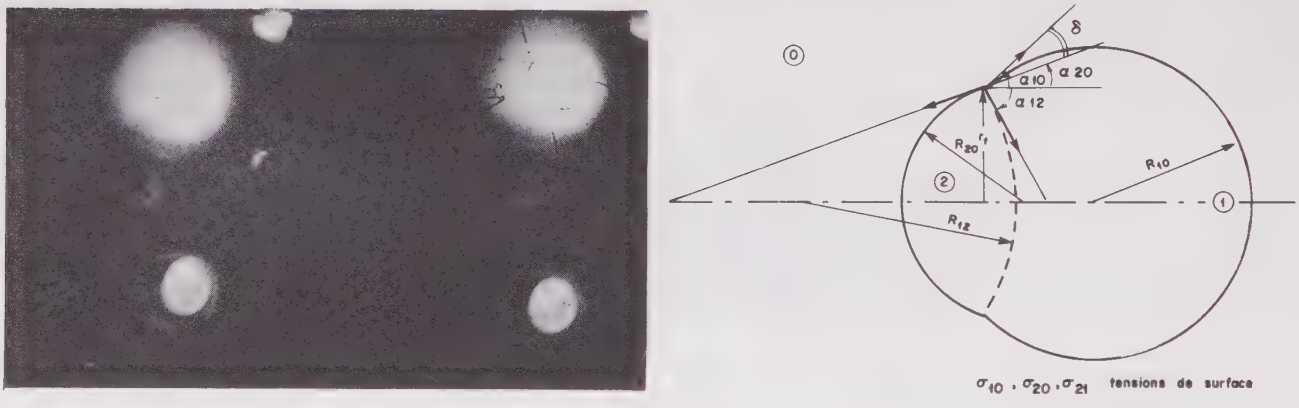
$$\sigma_{10} \sin\alpha_{10} - \sigma_{20} \sin\alpha_{20} + \sigma_{12} \sin\alpha_{12} = 0 ,$$

$$\sigma_{10} \cos\alpha_{10} - \sigma_{20} \cos\alpha_{20} + \sigma_{12} \cos\alpha_{12} = 0 ,$$

avec les notations et la concavité de la surface interne de la figure 16b. L'élimination de σ_{12} permet d'exprimer le rapport R' de R_{12} à R_{10} en fonction du rapport R de R_{20} à R_{10}, du rapport τ de σ_{20} à σ_{10} et de l'angle δ :

$$R' = \frac{\sqrt{1+\tau^2-2\tau\cos\delta}}{\left|\frac{\tau}{R}-1\right|} ,$$

$\forall$ la concavité.



a) mise en évidence par la photo

b) coupe dans un plan de symétrie

Fig. 16 - Calotte d'alumine formée sur une particule d'aluminium.

Le volume relatif cherché est déterminé de façon purement géométrique :

$$\upsilon = \frac{\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)^2\left(2R+\sqrt{R^2-r^2}\right) \pm \left(R'-\sqrt{R'^2-r^2}\right)^2\left(2R'+\sqrt{R'^2-r^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)^2\left(2-\sqrt{1-r^2}\right) \mp \left(R'-\sqrt{R'^2-r^2}\right)^2\left(2R'+\sqrt{R'^2-r^2}\right)} ,$$

avec $r = \frac{r_p}{R_{10}}$.

Pour une même géométrie extérieure, υ dépend du rapport τ des tensions de surface. A haute température, ces caractéristiques sont mal connues ; pour l'alumine liquide, on trouve une valeur voisine de 650 dynes/cm et pour l'aluminium 840 dynes/cm à 700°C. Ces données conduisent à prendre $\frac{\sigma}{R}$ proche de 1. On admettra pour simplifier que R' est infini si bien que l'expression de υ se simplifie.

Le calcul numérique, conduit pour des valeurs probables des masses volumiques, elles aussi mal connues à haute température, nous permet d'avancer :

- que les grosses particules ont un diamètre moyen compris entre 8 et 16 μ ,

- qu'elles représentent une fraction massique de la phase condensée qui est de l'ordre de 4 % .

3,3.3. Evolution des particules dans la chambre de combustion

Au contraire de la zone de combustion, la chambre a fait l'objet de quelques publications . Les hypothèses de Fein [27] sont très simplifiées : écoulement par tranches, condensation continue, loi de croissance en r^2 . L'analyse de Jenkins et Hoglund [24] est plus fine, sauf en ce qui concerne le schéma d'écoulement, et utilise une distribution initiale peu représentative du phénomène réel. L'analyse a été reprise en fonction des enseignements du paragraphe précédent ; on considère en particulier un écoulement bidimensionnel (canal cylindrique) ce qui permet de préciser la répartition spatiale de la phase condensée, et on suppose les particules réparties en deux classes.

a) Aspect biphasique de l'écoulement

Le champ de vitesses est maintenant :

$$v_z = 2v_0 \frac{z}{R} ,$$

$$v_r = -v_0 \frac{r}{R} .$$

Les équations réduites du mouvement d'une particule de diamètre constant sont :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} + \dfrac{dx}{d\tau} - 2Ix = 0 , \\ \dfrac{d^2y}{d\tau^2} + \dfrac{dy}{d\tau} + Iy = 0 , \\ \text{avec : } \tau = 0 , \; x = y = 1 , \; \dfrac{dx}{d\tau} = 2I , \; \dfrac{dy}{d\tau} = -I , \\ I = \dfrac{\tau_u v_0}{R} . \end{cases}$$

Ces équations s'intègrent aisément pour donner :

$$\frac{x_p}{x_{p0}} = \frac{\alpha + (1+4I)}{2\alpha} e^{\frac{\alpha-1}{2}\tau} + \frac{\alpha - (1+4I)}{2\alpha} e^{-\frac{\alpha+1}{2}\tau} ,$$

$$\frac{y_p}{R} = \frac{\beta + (1-2I)}{2\beta} e^{-\frac{1-\beta}{2}\tau} + \frac{\beta - (1-2I)}{2\beta} e^{-\frac{1+\beta}{2}\tau} ,$$

$$\text{où} \quad \alpha = \sqrt{1+8I} ,$$

$$\beta = \sqrt{1-4I} .$$

Même pour les plus grosses particules, I est toujours très inférieur à 1. En développant les expressions précédentes au voisinage de $I = 0$, on retrouve au second ordre près le mouvement d'une particule fluide.

On peut donc dire que les petites particules suivent parfaitement les lignes de courant de la phase gazeuse tandis que les grosses ne s'en écartent

que très peu. La ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement des produits de combustion est négligeable ; toutefois pour des géométries plus complexes (blocs usinés, tuyère intégrée), cet effet pourrait être localement plus marqué.

Du fait que le temps caractéristique de condensation est du même ordre que celui caractérisant le déséquilibre des vitesses, on en déduit que la condensation est pratiquement terminée dans la zone de combustion. On sait en outre que les effets de la compressibilité sont réduits dans la chambre ; le nombre de Mach est le plus souvent inférieur à 0,2, des vitesses plus élevées modifiant la vitesse de combustion du bloc de propergol (érosion).

On peut donc supposer que la masse volumique de la phase condensée est constante dans la chambre. Le problème est ainsi ramené à l'étude de l'agglomération des particules sur chaque ligne de courant.

En l'absence de renseignements expérimentaux concernant la répartition des particules en sortie de la zone de la combustion, on admet qu'elle peut être représentée analytiquement, en fonction de la masse, par l'expression :

$$f_0(m) = A\,\delta(m-m_1) + B\,\delta(m-m_2),$$

où δ est la fonction de Dirac, m_1 et m_2 la masse des petites et grosses particules ($m_2 \gg m_1$) et A et B la fraction numérique de chaque classe de particules ($A \gg B$, $A + B = 1$ si la loi est normée).

b) Schéma de croissance des particules

Soient $f(m,t)$ la loi de répartition normée des particules suivant la masse et n_p le nombre de particules par unité de volume. La fréquence des collisions entre particules des classes $(p, p+dp)$ et $(q, q+dq)$ s'écrit :

$$n_p^2 f(p,t) f(q,t) \Phi(p,q)\, dp\, dq .$$

Le bilan des particules de la classe $(m, m+dm)$ se traduit par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_p f(m,t) dm \right) = \frac{n_p^2}{2} \int_{p+q=m} f(p,t) f(q,t) \Phi(p,q)\, dp\, dq - n_p^2 \int_{p=0}^{\infty} f(m,t) f(p,t) \Phi(m,p)\, dp\, dm .$$

Le premier terme du second membre représente le nombre de particules formées lors des collisions binaires, le coefficient $\frac{1}{2}$ résultant de la symétrie en p et q.

L'intégrale correspondante peut être réécrite :

$$\int_0^m f(p,t) f(m-p,t) \Phi(p, m-p)\, dp\, dm .$$

On voit immédiatement l'intérêt d'utiliser, pour simplifier ce terme de production, la forme de fonction de collision proposée par Golovin :

$$\Phi(p,q) \simeq \beta(p,q)$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_p f(m,t) \right) = \frac{n_p^2 \beta m}{2} \int_0^m f(p,t) f(m-p,t)\, dp - n_p^2 \beta f(m,t) \left[\int_0^{\infty} p f(p,t) dp + m \right] ;$$

d'où, par intégration :

$$\frac{dn_p}{dt} = -n_p^2 \beta \int_0^\infty p f(p,t)\,dp .$$

Or on sait que la masse volumique de la phase condensée est constante :

$$\rho_p = n_p \int_0^\infty p f(p,t)\,dp = Cte .$$

Des deux dernières équations, on tire donc immédiatement :

$$\frac{n_p}{n_{po}} = \exp(-\beta \rho_p t).$$

La masse moyenne des particules est donnée par :

$$\overline{m} = \frac{\rho_p}{n_{po}} \exp(\beta \rho_p t).$$

Les calculs peuvent être poursuivis lorsque toutes les collisions binaires sont caractérisées par le même facteur β [19]. Cependant comme il existe deux classes de particules de diamètres très différents, les collisions ne se produisent probablement pas toutes suivant le même mécanisme.

Les petites particules étant caractérisiées par l'indice 1, les grosses par l'indice 2, on doit définir trois fonctions de collisions :

- $\Phi_{11}(p,q)$, pour les collisions des petites particules. On prendra :

$$\Phi_{11}(p,q) = \beta(p+q).$$

- $\Phi_{22}(p,q)$, pour les collisions entre grosses particules. En raison de leur nombre très réduit et leur inertie, la fréquence de ces collisions est très réduite et on néglige ce phénomène.

- $\Phi_{12}(p,q)$, pour les collisions mixtes. Un nouveau paramètre β' est défini par la relation :

$$\Phi_{12}(p,q) = \beta'(p+q) \simeq \beta' p,$$

p étant la masse des grosses particules $\left(\frac{p}{q} \gg 1\right)$.

L'équation de bilan pour les petites particules s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_{p_1} f_1) = \frac{\beta n_{p_1}^2}{2} m \int_0^m f_1(p,t) f_1(m-p,t)\,dp - \beta n_{p_1}^2 f_1(m,t)\left[m + \int_0^\infty p f_1(p,t)\,dp\right] - \beta' n_{p_1} n_{p_2} f_1(m,t) \int_0^\infty p f_2(p,t)\,dp.$$

On déduit de cette équation :

$$\frac{dn_{p_1}}{dt} = -\beta n_{p_1}^2 \int_0^\infty p f_1(p,t)\,dp - \beta' n_{p_1} n_{p_2} \int_0^\infty p f_2(p,t)\,dp,$$

et $$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\beta n_{p_1}}{2} m \int_0^m f_1(p,t) f_1(m-p,t)\,dp - \beta n_{p_1} m f_1(m,t).$$

En posant : $\frac{dz}{dt} = -\beta n_{p_1}$,

on obtient pour f_1 une équation formellement identique à celle qui correspond à une seule classe de particules ($\zeta = \frac{1}{m}$) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{m}{2}\int_0^m f_1(p,\zeta)\, f_1(m-p,\zeta)\, dp - m f_1(m,\zeta) = 0 .$$

Cette équation intégro-différentielle doit être intégrée, compte tenu de la condition initiale :

$$f_{10}(m) = \delta(m - m_{10}) .$$

Nous avons montré que la solution exacte est :

$$f_1(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^{i-1}}{i!} z^{i-1} e^{-iz} \delta(x-1) ,$$

avec
$$x = \frac{m}{m_{10}} ,$$
$$z = m_{10}(\zeta_0 - \zeta) .$$

Lorsque t augmente cette distribution tend vers une forme limite, qui correspond pour $m \gg m_{10}$ à :

$$f_1\left(\frac{m}{m_{10}}, z\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_{10}}{m}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

C'est une loi décroissante.

Les grosses particules sont en nombre constant et de diamètre uniforme, si bien que l'équation de bilan s'écrit :

$$n_{p_2} \frac{dm_2}{dt} = \beta' n_{p_1} n_{p_2} m_2 \int_0^{\infty} p\, f_1(p,t)\, dp ,$$

ou
$$\frac{dm_2}{dt} = \beta' n_{p_1} m_2 \overline{m_1} .$$

En utilisant le fait que la masse volumique de la phase condensée est constante, on aboutit au système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \beta n_{p_1} m_{10} , \\ \dfrac{dn_{p_1}}{dt} = -\beta n_{p_1} \rho_p + (\beta - \beta') n_{p_1} n_{p_{20}} m_2 , \\ \dfrac{dm_2}{dt} = \beta' m_2 (\rho_p - n_{p_{20}} m_2) , \\ \text{avec } t = 0 : \ z = 0 , \ n_{p_1} = n_{p_0} , \ m_2 = m_{20} , \\ \text{et } \ \overline{m_1} = \dfrac{\rho_p - n_{p_{20}} m_2}{n_{p_1}} . \end{cases}$$

Ces équations peuvent être intégrées analytiquement. On a fait apparaître :

- un temps réduit : $\tau = \frac{v_0 t}{R}$,

- des paramètres de collisions réduits :

$$\delta = \beta \frac{\rho_p R}{v_0} , \quad \delta' = \beta' \frac{\rho_p R}{v_0} , \quad \varepsilon = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\beta'}{\beta} ,$$

- la fraction massique de grosses particules α $\left(\alpha(0) = \alpha_0 \right)$,

- les nombres N_1 et N_2 des particules de chaque classe ramenés à leurs valeurs initiales.

On trouve finalement :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_0 + (1-\alpha_0) \exp(-\delta' \tau)} , \\ \Sigma = 1 - \left(\dfrac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{-\varepsilon} , \\ N_1 = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha_0} \left(\dfrac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{-\varepsilon} , \quad N_2 \equiv 1 , \\ \dfrac{\overline{m_1}}{m_{10}} = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{\varepsilon} , \quad \dfrac{\overline{m_2}}{m_{20}} = \dfrac{\alpha}{\alpha_0} . \end{cases}$$

Pour éliminer le temps, il suffit de reprendre les équations du mouvement d'une particule fluide. On trouve facilement que :

$$\exp(-\delta' \tau) = \left(\frac{r}{R} \right)^{\delta'} ,$$

où R est le rayon du canal cylindrique et r la distance à l'axe du point considéré dans la section terminale du bloc.

Le résultat le plus simple est relatif à la fraction massique α des grosses particules :

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \left[\alpha_0 + (1-\alpha_0) \left(\frac{r}{R} \right)^{\delta'} \right]^{-1}$$

α est plus important au centre de l'écoulement qu'à la périphérie, car le temps de séjour dans la chambre est plus important dans le premier cas que dans le second.

La valeur moyenne de α est donnée par :

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \alpha(r) \, 2\pi r \, dr .$$

pour $\delta' \ll 1$, il vient : $\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha_0} = 1 + (1-\alpha_0) \dfrac{\delta'}{2}$.

En l'absence de données sur la valeur de δ', on a cherché un ordre de grandeur en supposant qu'un champ acoustique harmonique longitudinal se trouve superposé au champ moyen de vitesse et que la réponse différentielle des petites et des grosses particules est à l'origine des collisions.

L'équation en x du mouvement d'une particule s'écrit :

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \frac{1}{\tau_u} \frac{dx_p}{dt} - \frac{2 v_0}{R \tau_u} x_p = \frac{U}{\tau_u} \sin \omega t ,$$

avec $t = 0$, $x_p = x_{p0}$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$,

et U, amplitude de la vitesse acoustique.

Cette équation peut être intégrée analytiquement. C'est la différence des vitesses instantanées qui est à l'origine des collisions. L'expression de cette différence peut être établie en remarquant que les petites particules suivent à peu près parfaitement le mouvement du gaz :

$$\Delta u_p = |u_{p2} - u_{p1}| = V \sin\varphi_2 \, |\cos(\omega t - \varphi_2)|,$$

avec $$\operatorname{tg}\varphi_2 = \omega \tau_{u2},$$

soit en moyenne :

$$\overline{\Delta u_p} = \frac{2}{\pi} V \frac{\omega \tau_{u2}}{\sqrt{1 + (\omega \tau_{u2})^2}}.$$

La section de collision est πr_2^2 . Un raisonnement élémentaire permet de trouver facilement :

$$\delta' = \frac{3}{2\pi} \times \frac{V R \rho_2}{v_0 r_2 \rho_c} \times \frac{\omega \tau_{u2}}{\sqrt{1 + (\omega \tau_{u2})^2}}.$$

Une application numérique pour les valeurs de l'intensité acoustique et de la fréquence de la référence [24] et de nos données expérimentales donne $\delta' = 0{,}06$. Cette valeur conduit à admettre que le diamètre des grosses particules varie peu en moyenne si l'on suppose l'acoustique responsable des collisions.

Le rôle de la diffusion turbulente reste à préciser. La valeur de β proposée par Jenkins et Hoglund conduit à une valeur de β de l'ordre de 10^5 et une croissance de la masse moyenne des petites particules nettement surestimée.

c) Conclusions

En raison des incertitudes subsistant sur les coefficients numériques des fonctions de collisions, les résultats n'ont encore qu'un caractère qualitatif. En dépit de cette restriction, le schéma de calcul proposé montre que la phase condensée reste répartie de façon homogène dans l'écoulement, que la répartition des petites particules tend vers une loi décroissante et que les grosses particules ont tendance à se développer au centre de l'écoulement. On peut s'attendre à une croissance plus marquée des particules lorsque l'échelle du propulseur augmente et que, par conséquent, le temps de séjour moyen dans la chambre augmente. L'amélioration de ce schéma passe par l'étude plus fine du comportement des particules dans l'écoulement réel, et nécessite le développement des techniques de mesure locale de la granulométrie.

3,3.4. Evolution des particules dans la tuyère

Le problème de la tuyère est le plus important au point de vue des pertes d'impulsion spécifique en raison du déséquilibre biphasique dû à l'accélération de l'écoulement.

On suppose connues les caractéristiques de la phase condensée dans la section d'entrée de la tuyère soit par le calcul, soit par des mesures. La détermination de ces caractéristiques à partir des résultats précédents n'est pas toujours immédiate. Il faut en effet noter qu'entre la section terminale du bloc et la section d'entrée de la tuyère se trouve une zone de raccordement dont

l'influence peut être sensible ; c'est le cas lorsque l'évolution de section est très rapide ou que se développent des tourbillons. L'intégration de la tuyère conduit également à des complications. Cet aspect du problème qui dépend de la configuration géométrique retenu sera écarté ; on peut cependant penser que du seul point de vue de la phase condensée il y a toujours intérêt à éviter les zones à forts gradients de vitesse.

L'étude de l'écoulement des produits de combustion dans la tuyère est très complexe dans sa plus grande généralité. Rappelons seulement ici que les effets bidimensionnels sont difficiles à prendre en compte même pour la détente d'un gaz parfait en raison de l'existence de la zone transsonique. La plupart des schémas proposés le sont donc dans l'hypothèse d'un écoulement par tranches et ne rendent pas compte de la ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement qui doit être étudiée séparément.

a) Rôle de la condensation dans la croissance des particules

Les mêmes mécanismes concourrent à la croissance des particules dans la chambre et dans la tuyère. On peut cependant chercher le mécanisme prépondérant.

On admet encore que la condensation, qui va se poursuivre en raison du déplacement des équilibres chimiques dû à la diminution de la température et de la pression, se produit de façon quasi instantanée (équilibre thermodynamique local) et suivant une loi en r^2 . Un calcul élémentaire a été conduit pour connaître l'effet de ce seul phénomène sur le rayon moyen de la phase condensée.

La vitesse de croissance peut être caractérisée par la variation du rayon minimal r_1 ou par la fraction R définie par la relation :

$$R^2 = r_1^2 - r_{10}^2 \quad .$$

En considérant la fonction de répartition des particules suivant le rayon, $f(r,t)$, on établit l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} f = 0 \quad .$$

En explicitant $\dot{r}$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial R^2}\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{f}{r}\right) = 0 \,,$$

soit

$$f(r,t) = r\,F(r^2 - R^2) \quad .$$

La fonction F est déterminée à partir de la répartition initiale des particules :

$$f(r,t) = \frac{r\,f_0(\sqrt{r^2 - R^2})}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad .$$

Les différents moments de la loi de répartition se mettent sous la forme :

$$r_{no}^n = \int_0^\infty (r^2 + R^2)^{\frac{n}{2}} f_0(r)\,dr \quad .$$

La fonction $R^2(t)$ est obtenue en établissant le bilan de la phase condensée, sa masse volumique ρ_p étant connue en chaque point par calcul thermodynamique. Il vient :

$$\frac{\int_0^\infty (r^2+R^2)^{\frac{3}{2}} f_0(r)\,dr}{\int_0^\infty r^3 f_0(r)\,dr} = \frac{\frac{\rho_p}{\rho_{p_0}} - \alpha}{1-\alpha_0} .$$

Afin de simplifier les calculs, on a choisi pour $f_0(r)$ la loi exponentielle décroissante qui a la même allure que la loi de répartition théorique des petites particules :

$$f_0(r) = \frac{1}{r_m} e^{-\frac{r}{r_m}} \qquad (r_{10} = 0) .$$

En définissant une fonction $I_n(z)$ par la relation :

$$I_n(z) = \int_0^\infty (v^2+z^2)^{\frac{n}{2}} e^{-v}\,dv ,$$

il vient finalement :

$$I_3\left(\frac{R}{r_m}\right) = 6\,\frac{\frac{\rho_p}{\rho_{p_0}} - \alpha_0}{1-\alpha_0} ,$$

$$\frac{r_{n_0}}{(r_{n_0})_0} = \left[\frac{I_n\left(\frac{R}{r_m}\right)}{n!}\right]^{\frac{1}{n}} .$$

Le calcul montre que la condensation se produit principalement sur les plus petites particules et que les moments d'ordre élevé en sont peu affectés. Ces moments étant les plus importants en pratique, la condensation apparaît ici comme un phénomène du second ordre qui pourra être négligé en première approximation. Ce résultat est corroboré par des calculs plus complets [24] qui montrent en outre que l'effet de l'acoustique est négligeable. Les seules collisions à prendre en compte dans la tuyère sont donc celles résultant de l'entraînement différentiel par la phase gazeuse.

b) Schéma de croissance des particules dans la tuyère [20]

On étudie dans un écoulement permanent par tranches les collisions binaires entre les particules. On admet généralement que deux particules qui se rencontrent s'agglomèrent instantanément et définitivement.

La phase condensée est décrite localement par la loi de répartition suivant le rayon que nous définirons ici, normée : $f(r,x)$, et les vitesses et les températures moyennes des particules de même rayon : $u_p(r,x)$ et $T_p(r,x)$.

Les collisions étant dues aux différences de vitesses moyennes, la fonction de collision s'exprime simplement; la fréquence des collisions entre les particules des classes $(a, a+da)$ et $(b, b+db)$ s'écrit :

$$\pi (a+b)^2 n_p^2 f(a,x) f(b,x) \left|u_p(a,x) - u_p(b,x)\right| da\,db ,$$

et ces collisions créent des particules de rayon $(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$.

Un bilan effectué sur les particules d'une même classe conduit à l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi n_p \left[-\frac{f I_1 + r^2 I_2}{u_p} - f \int_0^\infty \frac{-f I_1 + r^2 I_2}{u_p}\,dr \right] .$$

Les termes I_1 et I_2, correspondant à la disparition des particules dans les collisions et à la formation de nouvelles particules sont donnés par les

expressions :

$$I_1(r,x) = \int_0^\infty (r+a)^2 f(a,x) \left| u_p(r,x) - u_p(a,x) \right| da ,$$

$$I_2(r,x) = \frac{1}{2} \int_0^r \left[a + (r^3 - a^3)^{\frac{1}{3}} \right]^2 f(a,x) f\left((r^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}, x \right) \frac{\left| u_p(a,x) - u_p\left((r^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}, x \right) \right|}{(r^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}} da .$$

L'évolution de la phase condensée est liée, par l'intermédiaire des vitesses de particules, à l'écoulement de la phase gazeuse. Des calculs numériques peuvent tenir compte de ce couplage ; la fonction de répartition est rendue discrète et une équation différentielle est établie pour chaque classe de particules [28, 29, 30]. Ces calculs nécessitent des moyens puissants ; ils montrent que la pression, l'échelle de la tuyère, la fraction massique condensée et la répartition initiale ont une influence sensible sur la répartition finale. En outre, le rendement imparfait des collisions semble être un phénomène important [30].

Plutôt que de développer ce type de calcul, on a cherché par voie analytique si le problème ne pouvait être découplé de celui de l'écoulement. La simplification utilisée est celle du proche équilibre [31] et elle résulte des considérations suivantes : si la constante de relaxation en vitesse des particules, τ_u , est beaucoup plus petite que le temps de séjour des produits de combustion dans la tuyère, en première approximation la vitesse des particules peut être déterminée en fonction des caractéristiques locales de l'écoulement de la phase gazeuse, lui même très proche de l'écoulement en équilibre biphasique des produits de combustion (indice (e)) qui est bien connu (calcul thermodynamique).

Il vient dans cette hypothèse :

$$u_p(r,x) = u^{(e)} - \tau_u(r) \cdot u^{(e)} \frac{du^{(e)}}{dx} ,$$

à condition que : $\tau_u \left| \frac{du^{(e)}}{dx} \right| \ll 1 .$

Cette inégalité est bien vérifiée dans la plupart des cas pratiques pour la majorité des particules. Seules les grosses particules $(d_p > 10\mu)$ ne permettent pas une telle approximation et demanderaient un traitement séparé. Le régime réel de l'écoulement autour des particules peut lui aussi avoir une importance non négligeable.

En admettant la validité de l'expression de u_p pour toutes les particules, la fréquence de collision est proportionnelle à la différence des carrés des rayons.

La fonction de répartition peut être définie par ses différents moments.

L'équation pour le moment d'ordre n, r_{no} , s'écrit :

$$\frac{dr_{no}^n}{dx} = \frac{K\dot{m}}{\frac{8}{3}\rho_c A u^{(e)2} r_{30}^3} \left[\iint_D (y+z)^2 f(y,x) f(z,x) \left| u_p(y,x) - u_p(z,x) \right| \times \right.$$
$$\left. \times \left[(y^3+z^3)^{\frac{n}{3}} - (y^n+z^n) \right] dy\,dz \right.$$
$$\left. + r_{no}^n \iint_D (y+z)^2 f(y,x) f(z,x) \left| u_p(y,x) - u_p(z,x) \right| dy\,dz \right] ,$$

où K représente le rapport du débit massique de la phase condensée à celui de la phase gazeuse, $\dot{m}$ le débit massique total et A la section droite de la tuyère. Le domaine D est le premier quadrant dans le plan (y, z). L'hypothèse

du proche équilibre simplifié cette relation :

$$\frac{dr_{no}^{n}}{dx} = \frac{\dot{m}^{o}}{6A\mu u^{(e)} r_{30}^{3}} \left[\iint_{D'} (y+z)^2 (y^2-z^2) \left[(y^3+z^3)^{\frac{n}{3}} - (y^n+z^n) \right] f(y,x) f(z,x)\, dy\, dz \right.$$
$$\left. + r_{no}^{n} \iint_{D'} (y+z)^2 (y^2-z^2)\, f(y,x) f(z,x)\, dy\, dz \right].$$

Le domaine D' est maintenant compris entre l'axe y et la première bissectrice. Pour poursuivre le calcul, il faut donner une expression analytique de $f(y,x)$ et $f(z,x)$. On a choisi la forme :

$$f(r,x) = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} r^{b} e^{-ar}, \quad a>0, \quad b>-1 .$$

En prenant $b=0$ c'est-à-dire la loi exponentielle décroissante, on retrouve l'expression du rayon moyen proposée par Marble [31]. Cette approximation à un paramètre est cependant insuffisante pour rendre compte de l'agglomération [20]. On suppose dans l'expression de $f(r,x)$ que a et b varient avec x. Il est intéressant de relier a et b à des caractéristiques plus physiques. On trouve sans difficulté :

$$r_m = \frac{b+1}{a} \qquad (= r_{10}, \text{ rayon moyen en nombre}),$$

$$\sigma^2 = \frac{b+1}{a^2} \qquad (\text{écart quadratique moyen}).$$

On a conservé b et on a substitué à a la variable r_m :

$$f(r,x) = \frac{1}{r_m} \frac{(b+1)^{b+1}}{\Gamma(b+1)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{b} e^{-(b+1)\frac{r}{r_m}} .$$

On a choisi d'utiliser les deux premiers moments pour définir la loi de répartition. On peut faire apparaître une variable auxiliaire caractérisant l'évolution de section :

$$z = \frac{1}{6} \frac{\dot{m}^{o} r_{mo}}{A_c \mu} \int_{o}^{x} \frac{A_c}{A} \frac{1}{u^{(e)}} \frac{du^{(e)}}{dx} dx .$$

z ne dépend pas de la géométrie de la tuyère mais seulement de la section droite.

En remplaçant f par son expression en fonction de b et $\frac{r}{r_m}$ puis en revenant à a et b, on trouve :

$$\frac{da}{dz} = \frac{a_o}{b_o+1} (b+1) \left[(2b+3) J_1(b) - (b+1) J_2(b) \right],$$

$$\frac{db}{dz} = \frac{a_o}{b_o+1} \frac{(b+1)^2}{a} \left[(2b+4) J_1(b) - (b+1) J_2(b) \right],$$

avec :

$$J_1(b) = \frac{(b+1)^{2b+5}}{\Gamma(b+1)\Gamma(b+4)} \iint_{D'} (Y+Z)^2 (Y^2-Z^2) Y^b Z^b \times$$
$$\times \left[(Y^3+Z^3)^{\frac{1}{3}} - (Y+Z) + 1 \right] dY\, dZ ,$$

$$J_2(b) = \frac{(b+1)^{2b+5}}{\Gamma(b+1)\Gamma(b+4)} \iint_{D'} (Y+Z)^2 (Y^2-Z^2) Y^b Z^b \times$$
$$\times \left[(Y^3+Z^3)^{\frac{2}{3}} - (Y^2+Z^2) + b + 2 \right] dY\, dZ .$$

Les équations différentielles peuvent être intégrées et donnent :

$$\beta - \beta_0 = \frac{b+1}{L(b_0)} \left[M(b) - M(b_0) \right] ,$$

$$\frac{r_m}{r_{m_0}} = \frac{b+1}{b_0+1} \times \frac{L(b_0)}{L(b)} ,$$

$$\frac{\sigma^2}{r_m^2} = \frac{b_0+1}{b+1} ,$$

avec :

$$L(b) = \exp \left[\int_0^b \frac{(2b+3)J_1 - (b+1)J_2}{(2b+4)J_1 - (b+1)J_2} \cdot \frac{db}{b+1} \right] ,$$

$$M(b) = \int_0^b \frac{L(b)}{(2b+4)J_1 - (b+1)J_2} \cdot \frac{db}{(b+1)^2} .$$

Le calcul numérique de J_1 et J_2 est analytique sauf pour des expressions de la forme :

$$I = \int_0^1 t^b \left(1 - \frac{3}{4} t\right)^{\frac{n}{3}} dt \qquad (n = 1 \text{ ou } 2) ,$$

qui sont calculées à l'aide d'un développement. Le problème initial a donc été ramené à une suite de quadratures.

L'application numérique a porté sur une tuyère biconique. La répartition initiale des particules est le loi exponentielle décroissante ($b_0 = 0$). On a choisi pour simplifier :

$$\frac{K \rho_0 r_{m_0}}{C^* \mu} = 1$$

La figure 17 donne la variation des différents rayons moyens rapportés à leur valeur à l'entrée de la tuyère et de la dispersion relative des particules avec l'abscisse. Les observations suivantes peuvent être faites :

α> Le rayon moyen en nombre a tendance à décroître, ce qui peut être justifié analytiquement : les collisions dispersent les particules vers les petits et les grands rayons.

β> Les rayons moyens d'ordre élevé croissent rapidement dans la région du col, ceci de façon indépendante de la géométrie de la tuyère. Ce résultat est en désaccord avec les calculs de Crowe et Willoughby [28] qui indiqueraient que le convergent est la région privilégiée de l'agglomération et que la géométrie a une influence notable. Ces effets n'ont toutefois pas été mis en évidence par les autres chercheurs [29 - 30].

γ> La croissance des particules est modérée dans le divergent et pratiquement négligeable lorsque les particules commencent à se solidifier pour un rapport de section de l'ordre de 3.

En dépit des ordres de grandeur obtenus qui peuvent être considérés comme satisfaisants si on les compare aux résultats expérimentaux (paragraphe 3.2.4.2), ce schéma de calcul ne fournit qu'une approche qualitative du problème et devrait être amélioré en ce qui concerne les points suivants : représentation de la population des particules dans la section d'entrée de la tuyère (loi bimodale), rendement des collisions, expression de la différence de vitesse entre particules. Quoiqu'il en soit, l'importance primordiale du phénomène d'agglomération des particules semble être bien mise en évidence.

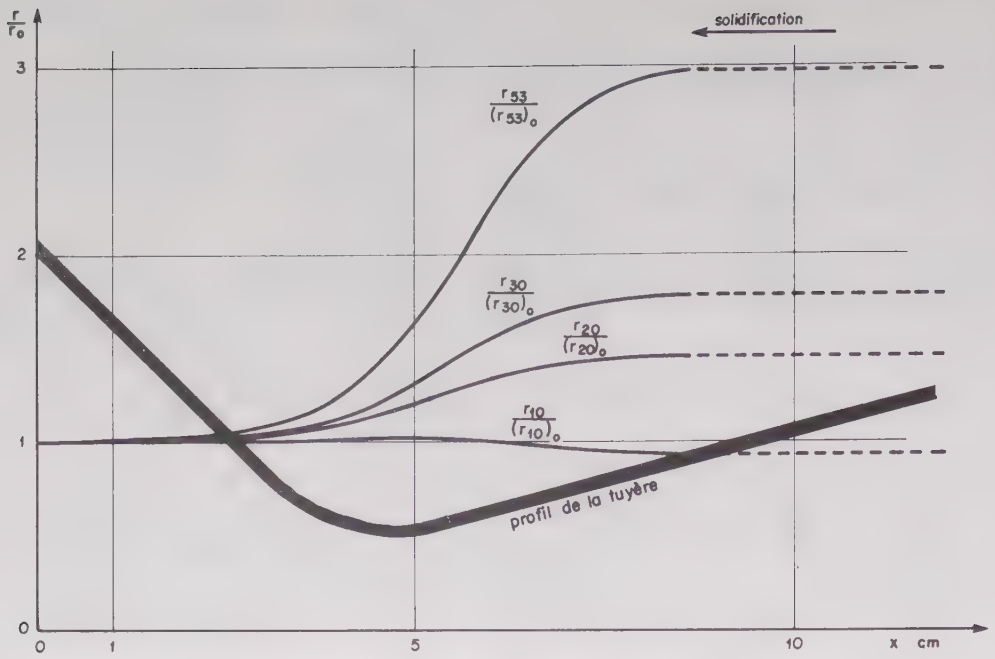


Fig. 17 - Croissance des particules dans la tuyère

c) Répartition spatiale de la phase condensée dans l'écoulement

La traînée des particules se manifeste également dans l'écoulement perpendiculairement à l'axe de la tuyère et on observe couramment dans la section de sortie que la zone centrale du jet est beaucoup plus lumineuse que la zone périphérique (figure 18) ce qui laisse supposer que la phase condensée a tendance à se grouper au centre du jet. L'étude de ce phénomène nécessite une description bidimensionnelle de l'écoulement. On sait que les gradients transverses de vitesse sont les plus importants dans la région du col c'est-à-dire dans la zone transsonique. L'analyse d'un écoulement biphasique dans la zone transsonique représente un problème difficile qui n'a pas été abordé dans sa généralité (collisions, croissance des particules) ; seuls Regan, Thompson et Hoglund [32] ont traité numériquement ce problème pour des particules de diamètre uniforme et constant.

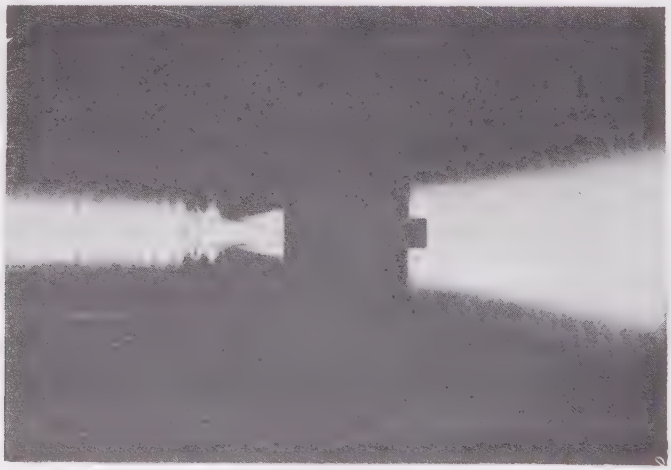


Fig. 18 - Ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement (propulseur à voyant)

Dans le but de donner une représentation approchée du phénomène, un schéma de calcul a été développé. Afin de rendre compte des effets bidimensionnels de l'écoulement, on utilise dans chaque zone de la tuyère un système de coordonnées curvilignes naturel (figure 19) : système sphérique pour le convergent (conique),

système sphérique torique pour le col (à rayon de courbure constant), système sphérique ou sphérique torique pour le divergent (divergent conique ou du type coquetier). Seul le col est étudié ici et le mouvement des particules est déduit d'une méthode de perturbation ; l'écoulement de référence correspond à l'équilibre biphasique ; les lignes de courant y sont les lignes $\xi = Cte$ et la vitesse ne dépend que de φ (ce qui signifie que la frontière sonique est dans ce cas le plan du col et que l'approximation est d'autant plus valable que le rapport du rayon de courbure du col au rayon du col est grand).

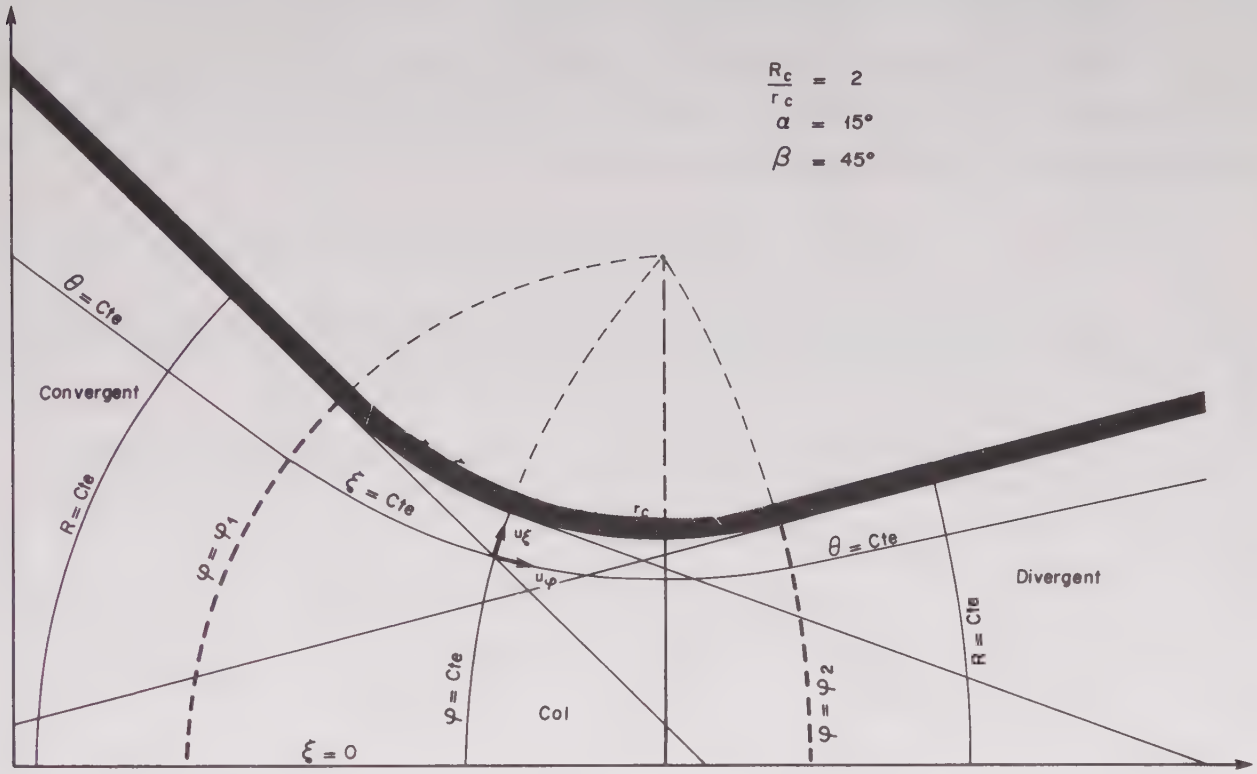


Fig. 19 - Systèmes de coordonnées pour l'étude des phénomènes bidimensionnels dans la tuyère.

Le mouvement d'une particule dans le champ de vitesse de référence est décrit par les équations :

$$\begin{cases} du_\varphi = u_\xi \left(\frac{\sin\varphi}{a} u_\xi + \frac{sh\xi}{a} u_\varphi \right) + \frac{v(\varphi) - u_\varphi}{I} , \\ \frac{du_\xi}{dt} = -u_\varphi \left(\frac{\sin\varphi}{a} u_\xi + \frac{sh\xi}{a} u_\varphi \right) - \frac{u_\xi}{I} , \end{cases}$$

où : $a = \sqrt{1 + 2\frac{R_c}{r_c}}$,

et : $I = \frac{\omega u_0}{r_c}$ paramètre d'inertie basé sur la vitesse limite et le rayon du col.

On pose :

$$u_\varphi = v(\varphi) + I u_\varphi^{(1)} + \dots$$

$$u_\xi = I u_\xi^{(1)} + \dots$$

Il vient immédiatement :

$$u_\varphi^{(1)} = -\frac{dv}{d\varphi} ,$$

$$u_\xi^{(1)} = -\frac{sh\xi}{a} v^2 .$$

Nous ne nous intéresserons ici qu'au déphasage latéral dû à u_ζ . La position d'une particule étant repérée par φ et ζ , on établit alors l'équation :

$$\frac{d\zeta}{sh\zeta} = -\frac{I}{a} v(\varphi)\, dv ,$$

ou

$$\text{Log}\ \frac{th\frac{\zeta_1}{2}}{th\frac{\zeta_2}{2}} = \frac{I}{a}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} v\, d\varphi .$$

Pour les valeurs numériques retenues, on trouve ainsi la relation entre les positions ζ_1 et ζ_2 dans les sections d'entrée et de sortie du col d'une particule dont le diamètre est caractérisé par I :

$$\zeta_2 - \zeta_1 \simeq -0{,}0045\, I\, sh\, \zeta_1 .$$

Cette formule montre bien que les plus grosses particules ont tendance à se rapprocher de l'axe de la tuyère et permet de définir dans la section la position limite d'une particule de taille donnée ($\zeta_1 = \zeta_p$).

La répartition spatiale de la phase condensée dans l'écoulement est décrite par la masse volumique ρ_p de la phase condensée. Pour calculer ρ_p on peut partir de l'équation de continuité :

$$div\ \rho_p \vec{u}_p = 0 .$$

On posera encore :

$$\rho_p = \rho_p^{(0)} + I\,\rho_p^{(1)} + \dots$$

On supposera pour simplifier une distribution spatiale uniforme dans la section d'entrée 1 : $\rho_p^{(0)}(\varphi_1)$ est indépendant de ζ . Les termes d'ordre 0 conduisent à :

$$\frac{\rho_p^{(0)}(\varphi,\zeta)}{\rho_p^{(0)}(\varphi,0)} = \left(\frac{ch\zeta+\cos\varphi}{ch\zeta+\cos\varphi_1} \times \frac{1+\cos\varphi_1}{1+\cos\varphi}\right)^2 .$$

Cette relation indique que même en l'absence d'effets biphasiques la masse volumique est plus importante au centre de l'écoulement qu'à la périphérie .

Ce résultat correspond bien à ce que l'on connait de la zone transsonique.

Les termes d'ordre I nous conduisent, pour des particules de diamètre uniforme, à la relation :

$$\frac{I\rho_p^{(1)}}{\rho_p^{(0)}} = \frac{2I}{a}\,\frac{1+ch\zeta\cos\varphi_1}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi} v\, d\varphi .$$

On a ainsi par exemple sur l'axe du jet :

$$\left(\frac{\rho_p}{\rho_p^{(0)}}\right)_{\zeta=0} = 1 + 0{,}0090\, I .$$

Les effets biphasiques contribuent donc à augmenter la masse volumique de la phase condensée au centre de l'écoulement.

Ces calculs peuvent être étendus à une distribution initiale de particules $f_1(r,\zeta)$ (collisions négligées). La masse volumique des particules de rayon r est en un point :

$$d\rho_p = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3 f_1(r,\zeta)\frac{v(\varphi_1)}{v(\varphi)}\left(\frac{ch\zeta+\cos\varphi}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\right)^2\left[1+\frac{2I}{a}\frac{1+ch\zeta\cos\varphi}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi} v\,d\varphi\right]dr,$$

si $\quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_L$

et $\quad d\rho_p = 0 \quad , \qquad$ si $\quad \zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_P ,$

où ζ_L est la position limite d'une particule.

A chaque point (φ,ζ) peut être inversement assignée une valeur supérieure limite du rayon r_L, si bien que la masse volumique s'écrit :

$$\frac{\rho_p}{\rho_p^{(\infty)}} = \frac{\displaystyle\int_0^{r_L(\varphi,\zeta)} r^3 f_1(r,\zeta)\left(1+\frac{2I}{a}\frac{1+ch\zeta\cos\varphi_1}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi} v\,d\varphi\right)dr}{\displaystyle\int_0^{\infty} r^3 f_1(r,\zeta)\,dr} .$$

La loi de répartition est donnée par :

$$f(r,\varphi,\zeta) = \frac{f_1(r,\zeta)\left(1+\frac{2I}{a}\frac{1+ch\zeta\cos\varphi_1}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi} v\,d\varphi\right)}{\displaystyle\int_0^{r_L(\varphi,\zeta)} f_1(r,\zeta)\left(1+\frac{2I}{a}\frac{1+ch\zeta\cos\varphi}{ch\zeta+\cos\varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi} v\,d\varphi\right)dr} ,$$

pour $\quad r \leq r_L ,$

et $\quad f(r,\varphi,\zeta) = 0 \qquad$ pour $\quad r > r_L .$

L'application numérique a été faite en supposant la distribution initiale des particules indépendante de ζ et exponentielle :

$$f_1(r,\zeta) = \frac{1}{r_{m_1}}\, e^{-\frac{r}{r_{m_1}}} .$$

La figure 20 donne la variation de la masse volumique réduite en fonction de la position repérée par l'angle Θ du divergent dans la section 2 pour quelques valeurs de I basées sur le rayon moyen r_{m_1} (en pratique, on vérifie que I est de l'ordre de l'unité). Les courbes sont caractérisées par une forte décroissance au voisinage de la paroi ; cette forme est à rapprocher de la variation d'intensité lumineuse du jet (figure 18). Les courbes donnant la variation du rayon moyen local et du coefficient de dispersion sont similaires.

On observe donc que les phénomènes bidimensionnels sont marqués pour ce type d'écoulement biphasique. La ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement peut accroître la croissance des particules au centre de l'écoulement et complique le calcul des pertes par divergence. Il sera donc nécessaire de développer un schéma d'écoulement tenant compte à la fois des collisions et des déphasages latéraux.

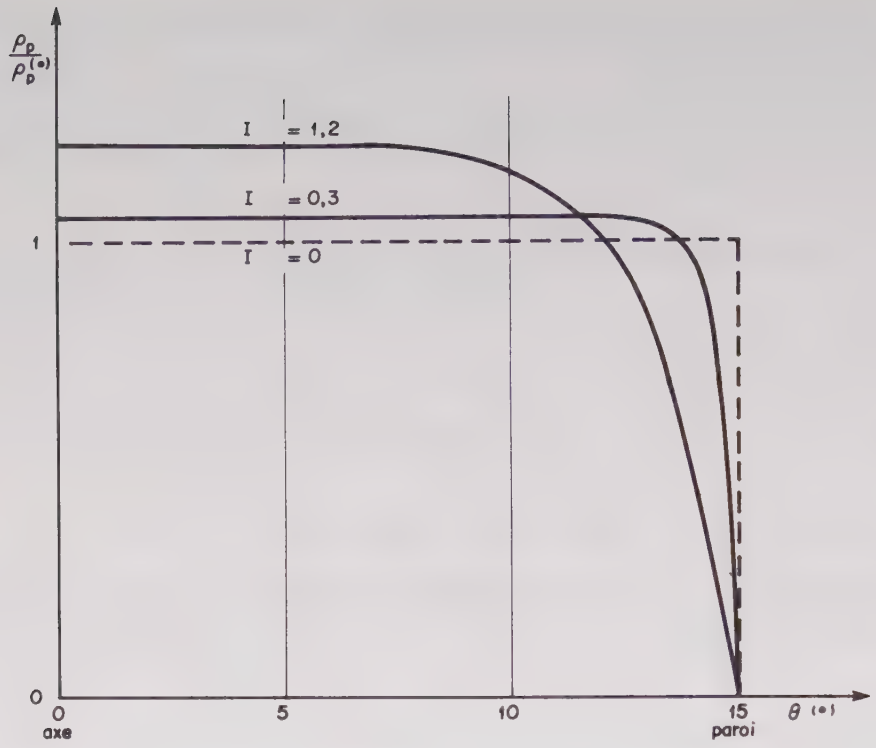


Fig. 20 - Variation de la masse volumique de la phase condensée après le col.

3,4. CONCLUSIONS

La phase condensée nécessite des moyens d'étude à la fois expérimentaux et théoriques. C'est surtout la croissance des particules qui limite la précision des résultats car les phénomènes fondamentaux des collisions sont encore imparfaitement connus. En raison de ces difficultés et bien que la description qualitative de la phase condensée puisse être considérée comme acquise, les données numériques sont encore affectées d'une marge d'incertitude importante et il faut s'attendre à ce que cette imprécision se retrouve dans l'estimation finale des pertes d'impulsion spécifique.

4. ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS BIPHASIQUES

Les interactions des deux phases ont été jusqu'à présent assez simplifiées lorsque notre objectif était d'approfondir le comportement de la phase condensée. Pour préciser leur rôle dans la détente des produits de combustion, en vue d'estimer les pertes d'impulsion spécifique, il faut maintenant étudier d'une manière plus fondamentale les écoulements biphasiques. Nous reprenons ici des éléments de la publication [33] :

4,1. SCHÉMATISATION DE LA PHASE CONDENSÉE

Les particules formées dans le processus de combustion sont très nombreuses en raison de leur faible diamètre. Bien que représentant une fraction massique notable des produits de combustion, elles ne correspondent qu'à une fraction volumique très faible. Ces deux particularités : faible dimension et faible volume relatif des éléments dispersés caractérisent les suspensions [34]. On peut définir des volumes élémentaires très petits par rapport à l'enceinte considérée mais dont les dimensions sont très supérieures à celles des particules et qui en contiennent un grand nombre.

L'application aux suspensions des méthodes des écoulements homogènes se heurte dès le départ à la difficulté de définir correctement le ou les volumes de contrôle. Un volume pour l'ensemble des deux phases se décompose en un volume occupé par la phase gazeuse et un volume occupé par la phase condensée. Du fait du déplacement des particules dans la phase gazeuse, ces volumes sont en évolution constante, si bien que par nature, un écoulement polyphasique est instationnaire et tridimensionnel. Il est possible du seul point de vue théorique d'étudier séparément la phase gazeuse et chaque particule. Cette attitude permet de dégager les règles de similitude de l'écoulement mais le nombre très élevé d'équations auxquelles elle conduit est inadapté au calcul. On peut penser que, lorsque les dimensions du volume général de contrôle deviennent suffisamment grandes tout en restant très inférieures à celles de l'enceinte, les fluctuations des volumes de la phase gazeuse et de la phase condensée vont diminuer et que les méthodes statistiques seront utilisables. L'idée fondamentale est alors de chercher à représenter la phase condensée comme un milieu continu mélangé à la phase gazeuse et en interaction avec elle.

La démarche la plus rigoureuse pour parvenir à ce résultat consiste à définir pour chaque grandeur une moyenne dans le temps et dans l'espace [35, 36].

Ces grandeurs doivent être insensibles à l'ordre dans lequel sont effectuées les moyennes, ce qui impose les deux conditions suivantes :

- les fluctuations du nombre de particules dans le volume considéré sont très petites par rapport au nombre moyen de particules dans ce volume ;

- le temps de passage d'une particule en un point est très inférieur à l'intervalle de temps utilisé pour établir la moyenne.

Ces deux conditions fixent les limites inférieures spatiale et temporelle au-dessous desquelles les équations du continu ne peuvent plus être utilisées. Il apparaît dans les équations du gaz et de la phase gazeuse des termes dus aux fluctuations de vitesse et de température des particules et de forme analogue aux termes de Reynolds de la théorie turbulente classique. Ces termes liés au passage de l'écoulement réel à sa description continue subsistent même si l'écoulement gazeux est supposé laminaire. Il existe une pression de la phase condensée qui est indépendante de celle qui est parfois calculée lorsque les particules sont animées d'un mouvement brownien. Les termes complémentaires de fluctuation sont difficiles à évaluer et rendent malaisée l'utilisation des équations générales. Cependant, il a été montré que, si le milieu est très dispersé (fraction volumique occupée par les particules très inférieure à 1), les termes de fluctuation sont négligeables ainsi que la pression de la phase condensée. Si l'écoulement gazeux est turbulent, il existe des termes de Reynolds dans les deux phases qui doivent être corrélés.

La possibilité du passage à une description continue de la phase condensée étant admise, les équations générales peuvent être obtenues par deux voies : soit en étudiant séparément l'évolution de chaque classe de particules caractérisée par une valeur du diamètre, soit en établissant directement les équations pour les grandeurs moyennes de la phase condensée. Dans le premier cas, il faut expliciter les termes d'interactions entre les différentes classes de particules, ce qui est possible lorsque les particules sont solides [6], mais est moins aisé lorsque les particules sont liquides et s'agglomèrent. La seconde attitude est plus générale [5] et a été retenue.

Des hypothèses simplificatrices ont été faites en ce qui concerne les interactions entre particules et entre phases. On néglige les forces à distance et les échanges par rayonnement entre particules. On suppose que l'interface entre la phase gazeuse et les particules est une surface idéale au travers de laquelle se produisent des échanges et de part et d'autre de laquelle peuvent être définies des propriétés pour chaque phase. L'interface correspond uniquement à une discontinuité de pression et de masse volumique. On admettra, enfin, que les particules sont toujours sphériques, ce qui a été vérifié expérimentalement par les captations mentionnées au paragraphe 3.2, mais se trouve en défaut dans les zones à forte accélération où les particules liquides se déforment.

4,2. ÉQUATIONS DE LA PHASE CONDENSÉE

La phase condensée est décrite localement par une fonction de répartition f qui dépend des variables spatiales x_i, des composantes de la vitesse c_j, de l'énergie interne massique e des particules (la température est supposée uniforme dans chaque particule), du rayon σ et du temps t. Cette fonction f peut être supposée continue par rapport aux différentes variables.

La quantité :

$$f(x_i, c_j, e, r, t)\, d^3x_i\, d^3c_j\, de\, dr$$

représente, au temps t, le nombre de particules, contenues dans le volume défini par x_i , $x_i + dx_i$ et possédant une vitesse dont les composantes sont comprises entre c_j et $c_j + dc_j$, une énergie interne comprise entre e et $e + de$, et un rayon compris r et $r + dr$.

4,2.1. Equation fondamentale de la phase condensée

La fonction f obéit à une équation de bilan du type Liouville-Boltzmann, qui s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}(f \dot{q}_i) = h(q_i, t).$$

Dans cette équation, les q_i sont les coordonnées de l'espace des phases. Les dérivées $\dot{q}_i$ sont des fonctions de q_i et t données par les phénomènes extérieurs tandis que la fonction $h(q_i, t)$ est au contraire due aux phénomènes internes à la population de particules.

a) Expression des dérivées dans l'espace des phases :

On note tout d'abord que :

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i .$$

Il vient donc :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (f \dot{x}_i)}{\partial x_i} = \operatorname{div}(f \vec{c}) ,$$

$\vec{\varphi}$ représentant la force exercée sur une particule de masse m , l'équation du mouvement d'une particule s'écrit :

$$\frac{dc_j}{dt} = \frac{\varphi_j}{m} .$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (f \dot{c}_j)}{\partial c_j} = \operatorname{div}_{\vec{c}} \left(\frac{f \vec{\varphi}}{m} \right) .$$

La force $\vec{\varphi}$ représente la résultante des forces élémentaires agissant sur une particule isolée ; ce sont :

- le poids de la particule : $\varphi_{j1} = m g_j$,
- la force exercée par la phase gazeuse sur la particule : $\varphi_{j2} = T_j$.

La valeur de la traînée T dépend d'un grand nombre de paramètres tels que : la forme, la dimension et l'état de surface de la particule, le champ de vitesse dans la phase gazeuse et l'histoire du mouvement de la particule.

Les résultats expérimentaux obtenus sur des particules de taille millimétrique sont généralement extrapolés aux particules microscopiques. L'expression la

plus simple de la traînée est obtenue, pour un fluide incompressible et en régime de Stokes lorsque le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la particule et la différence de vitesse entre gaz et particule est très inférieur à 1. En raison des fortes différences de masse volumique entre le gaz et la particule, on peut négliger les termes transitoires de la traînée. Pour tenir compte des effets d'inertie, de compressibilité et, éventuellement, de raréfaction (divergent à grand rapport de détente), on corrige le coefficient de traînée établi en régime de Stokes par un facteur $\mathcal{C}_u$ établi de façon semi-empirique [37, 38] et dépendant du nombre de Reynolds, du nombre de Mach et du nombre de Knudsen. De nombreuses formules sont présentées dans la littérature couvrant tous les domaines de fonctionnement des propulseurs. Les écarts d'impulsion spécifique résultant de l'utilisation des différentes formules sont relativement modérés pour les pressions de chambre moyennes [39] et l'incertitude subsistant sur certains phénomènes liés à la phase condensée est supérieure à celle concernant les lois de traînée.

En définitive, on écrira :

$$\frac{\vec{\varphi}}{m} = \vec{g} + \frac{\mathcal{C}_u(\vec{u_g} - \vec{c})}{\tau_u} ,$$

et on utilisera souvent la simplification :

$$\mathcal{C}_u = 1 .$$

De même, q étant le flux thermique reçu par une particule, on peut écrire :

$$\frac{\partial(f\dot{e})}{\partial e} = \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{fq}{m}\right) .$$

En l'absence d'échanges radiatifs entre particules ou entre les particules et l'enceinte, le flux thermique est uniquement dû à l'échange convectif établi entre la phase gazeuse et la particule dont les températures sont différentes. Si une condensation se produit sur les particules, la chaleur dégagée dans le processus est entièrement évacuée par la phase gazeuse. Le calcul du flux q en fonction des autres grandeurs soulève les mêmes problèmes que celui du coefficient de traînée ; il est traité de manière similaire. Au régime de Stokes correspond le transfert thermique par conduction pure qui conduit à une valeur caractéristique du nombre de Nusselt :

$$Nu = 2 .$$

Cette valeur est corrigée pour tenir compte des effets de gaz réel. Le facteur correctif est noté $\mathcal{C}_T$; plusieurs expressions en sont données dans la littérature [38]. Il vient finalement :

$$\frac{q}{m} = \frac{\mathcal{C}_T \overline{C_c}(T_g - T_p)}{\tau_T} \simeq \frac{\mathcal{C}_T\, e(T_g) - e}{\tau_T} ,$$

où

$$\tau_T = \frac{\sigma^2 \rho_c \overline{C_c}}{3\lambda} = \tau_u \times \frac{3}{2}\overline{T_r} \times \beta$$

On prendra bien souvent : $\mathcal{C}_T = 1$.

M étant le débit massique se déposant sur une particule, on a enfin :

$$\frac{\partial(fv)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{fMr}{3m}\right) .$$

Une expression de M peut être déduite des calculs présentés lors de l'étude de

la formation des particules d'alumine (chapitre 331).

b) Expression du second membre :

Les phénomènes de la population de particules qui modifient l'état d'une particule sont les collisions et les désintégrations (la formation de nouvelles particules est ici négligée).

Le rôle et l'importance des collisions, leurs origines variées ont déjà été montrés. Rappelons simplement que dans le choc de deux particules solides, considérées comme parfaitement élastiques, la modification porte sur les vitesses seulement tandis que des particules liquides peuvent s'agglomérer.

La désintégration d'une particule liquide est susceptible de se produire sans choc dans un écoulement fortement accéléré. Le critère d'éclatement le plus répandu est basé sur le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho |\vec{u}_g - \vec{c}| d_p}{\gamma},$$

où γ est la tension de surface.

Lorsque le nombre de Weber dépasse une valeur critique de l'ordre de 10 à 20, alors la particule est désintégrée. Certains auteurs admettent que ce phénomène limite la dimension maximale des particules [40], ce qui semblerait prouver la variation expérimentale de cette caractéristique avec la taille de la tuyère. En réalité, on sait que le phénomène n'est pas instantané et que les particules commencent tout d'abord à se déformer progressivement sous l'action des différentes forces de surface ; d'autre part, l'existence d'une limite supérieure pour le diamètre des particules doit être reliée au mécanisme de formation et au temps de séjour dans la tuyère. Les désintégrations spontanées ne sont donc pas systématiques ; au plus, elles n'intéressent qu'un nombre limité de très grosses particules c'est-à-dire la classe de la population qui est encore mal connue. Le phénomène sera par conséquent négligé par la suite.

Dans les collisions on considèrera successivement le cas des particules solides et celui des particules liquides.

On écrit dans tous les cas le nombre de collisions se produisant par unité de volume et de temps entre deux classes de particules sous la forme :

$$f(x_i, c_j, e, \sigma, t) f(x_i, c'_j, e', \sigma', t) \Phi(x_i, c_j, c'_j, e, e', \sigma, \sigma', t) \, d^3c_j \, de \, d\sigma \, d^3c'_j \, de' \, d\sigma'.$$

La fonction Φ est la fonction de collision. Elle est symétrique par rapport aux particules et doit en principe prendre la forme :

$$\Phi(|\vec{c} - \vec{c}'|, |\sigma - \sigma'|, (\sigma + \sigma'), x_i, t).$$

L'expression de Φ résulte de l'étude du mécanisme intime des collisions et il est souvent nécessaire de donner à Φ une forme simplifiée ; diverses expressions en ont été données au chapitre 3.3.1.

Toutes les collisions des particules de la classe $d^3c_j \, de \, d\sigma$ avec toutes les autres sont obtenues par intégration et se traduisent par un terme de disparition dans le second membre de l'équation fondamentale, qui vaut :

$$h(q_i, t) = -f \iiint_D f(x_i, c'_j, e', \sigma', t) \, \Phi \, d^3c'_j \, de' \, d\sigma' :$$

L'autre terme du second membre lié aux collisions est un terme de production ; on doit considérer tous les chocs binaires entre particules qui ont pour résultat la formation d'une particule de la classe donnée. La forme de ce terme est différente si les particules sont solides ou liquides.

- Particules solides :

le terme de production s'écrit :

$$h_{2s}(q_i,t) = \iiint_{D_S} f(x_i,c_j,e,\sigma,t)\, f(x_i,c_j'',e'',\sigma'',t)\,\Phi \; d^3c_j\, d^3c_j''\, de''\, d\sigma''\, d^2\delta_j \;,$$

le domaine d'intégration D_S étant tel que :

$$\begin{cases} c_j' + \dfrac{2}{1+\left(\frac{m_j}{m_j''}\right)^3}\left[(c_j''-c_j')(1-d^2) - |\vec{c}''-\vec{c}'|\sqrt{1-d^2}\,d_j\right] = c_j \;, \\ |\vec{\delta}| \leq 1 \;, \quad \sum_j \delta_j (c_j''-c_j') = 0 \;. \end{cases}$$

- Particules liquides :

le problème pour les particules liquides est plus complexe du fait que la collision peut se dérouler en plusieurs étapes, ainsi que le signalent certains auteurs [30]. On a en effet remarqué été que si la différence de vitesse entre les deux particules incidentes est assez forte, l'agglomération est suivie d'un éclatement, c'est-à-dire que la particule intermédiaire formée n'est pas stable. Ce phénomène dépendrait des deux nombres sans dimension caractérisant les conditions du choc :

$$\mathcal{R}_e = \frac{2\,|\vec{c}-\vec{c}'|\,|\sigma-\sigma'|\,\rho_c}{\mu_c} \;,$$

$$\Gamma = \frac{\mu_c^2}{2\,|\sigma-\sigma'|\,\tau_c\,\rho_c} \;.$$

Il faut alors définir une nouvelle fonction $G\left(c_j''', e''', \sigma''', |\sigma-\sigma'|, |\vec{c}-\vec{c}'|\right)$ donnant le nombre de particules de la classe $d^3c_j''' \, de''' \, d\sigma'''$ formées dans les collisions des particules $(\sigma, \vec{c})$ et $(\sigma', \vec{c}')$. L'énergie interne et la vitesse des particules formées après éclatement sont celles de la particule intermédiaire et elles se calculent assez aisément. G se présente donc sous la forme :

$$G\left(\sigma'', |\sigma-\sigma'|, |\vec{c}-\vec{c}'|\right),$$

et le terme de production s'écrit :

$$h_{2L}(q_i,t) = \frac{1}{2}\iiint_{D_L} f(x_i,c_j,e,\sigma,t)\, f(x_i,c_j'',e'',\sigma'',t)\,\Phi \; G\left(\sigma, |\sigma-\sigma''|, |\vec{c}-\vec{c}''|\right) d^3c_j\, d^3c_j''\, de\, de''\, d\sigma\, d\sigma'',$$

le domaine d'intégration D_L étant tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{c_g' + c_g''\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3}{1+\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3} = c_g , \\ \dfrac{e' + \left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3 e'' + \frac{1}{2}|\vec{c}'-\vec{c}''|^2 \frac{\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3}{1+\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3}}{1+\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)^3} = e , \\ (\sigma'^3+\sigma''^3)^{\frac{1}{3}} = \sigma , \end{cases}$$

et le coefficient $\frac{1}{2}$ tenant compte du rôle symétrique joué par les collisions. Sous forme condensée, le second membre de l'équation fondamentale se met donc sous la forme :

$$h = -f\int_{D_1} f'\Phi\, dv_1 + \int_{D_s} f'f''\Phi\, dv_s \quad \text{, (particules solides)} ,$$

$$h = -f\int_{D_1} f'\Phi\, dv_1 + \frac{1}{2}\int_{D_L} f'f''\Phi G\, dv_L \quad \text{, (particules liquides)} .$$

On doit admettre que les fonctions de collision Φ et de production G sont assez mal connues. Ces incertitudes ont une répercussion directe sur l'évolution de la phase condensée. Par contre, dans les équations caractérisant le comportement moyen de la phase condensée, ces fonctions n'apparaîtront pas explicitement du fait que les collisions obéissent elles-mêmes à certaines lois de conservation.

Pour établir ces équations, on procède d'une manière commune : après avoir multiplié les deux membres de l'équation par une même quantité, on les intègre sur l'espace (g, e, σ). Les grandeurs moyennes apparaissent ainsi naturellement.

4,2.2. Equation de continuité

Le facteur multiplicatif est $m(\sigma)$. On définit la masse volumique de la phase condensée et sa vitesse par les relations :

$$\rho_P = \iiint m(\sigma) f d^3g\, de\, d\sigma ,$$

$$u_{P_i} = \frac{1}{\rho_P}\iiint m(\sigma) c_i f d^3g\, de\, d\sigma .$$

ρ_P représente la masse de phase condensée contenue dans une unité de volume du mélange ; c'est donc une masse volumique fictive qui est reliée à la masse volumique vraie des particules ρ_c par l'intermédiaire de la fraction volumique occupée par la phase condensée :

$$\rho_P = \varepsilon \rho_c .$$

Le premier membre contient tout d'abord les termes portant sur les variables

temporelle et spatiales :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_p u_{pi}) .$$

Des autres termes portant sur les autres variables de l'espace des phases (c, e, σ), seul celui relatif au rayon n'est pas nul et il s'écrit :

$$-\iiint M f d^3c \, de \, d\sigma = -\dot{w}_p .$$

C'est un terme correspondant à la production de masse par condensation.

La masse étant conservée dans les collisions, le second membre est identiquement nul si bien que l'équation de continuité de la phase condensée prend la forme classique :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_p \vec{u}_p) = \dot{w}_p .$$

4,2.3. Equation de quantité de mouvement

Le facteur multiplicatif est $m(\sigma) c_k$.

L'intégration fait apparaître au premier membre, outre les grandeurs déjà définies, des termes tels que :

- la force exercée par unité de volume par la phase gazeuse sur la phase condensée, dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} F_{pk} &= \iiint \varphi_k f \, d^3c \, de \, d\sigma \\ &= \rho_p g_k + \iiint \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_i}(u_k - c_k) m(\sigma) f d^3c \, de \, d\sigma \\ &= F_{pk1} + F_{pk2} , \end{aligned}$$

- des termes provenant de la diffusion des particules dans le mouvement barycentrique. On pose :

$$D_{pik} = -\iiint (c_i - u_{pi})(c_k - u_{pk}) m(\sigma) f d^3c \, de \, d\sigma ,$$

$$K_{pk} = \iiint (c_k - u_{pk}) M f d^3c \, de \, d\sigma .$$

La quantité de mouvement se conserve dans les collisions, si bien que le second membre est encore identiquement nul. On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p u_{pk}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_p u_{pk} u_{pi}) = F_{pk} + \dot{w}_p u_{pk} + \sum_i \frac{\partial D_{pik}}{\partial x_i} + K_{pk} .$$

Cette équation peut être combinée avec l'équation de continuité multipliée par u_{pk}. Il vient ainsi sous forme vectorielle :

$$\rho_p \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial t} + \rho_p \vec{u}_p \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \vec{u}_p = \vec{F}_p + \operatorname{div} \vec{\vec{D}}_p + \vec{K}_p .$$

Par rapport à l'équation classique de quantité de mouvement d'un fluide homogène, on note l'absence du terme de pression, la présence du terme de force et de celui de diffusion. En l'absence de condensation, le terme complémentaire $\vec{K}_p$ n'existe pas.

4,2.4. Equation de l'énergie

Le facteur multiplicatif est $m(\sigma)e$. L'énergie interne massique est obtenue par sommation :

$$e_p = \frac{1}{\rho_p} \iiint m(\sigma) e f d^3c_g de d\sigma .$$

On définit :

- la chaleur transmise du gaz à la phase condensée par unité de volume et de temps :

$$Q = \iiint q f d^3c_g de d\sigma$$

$$= \iint \frac{\theta_T}{\tau_T} \left[e(T_g) - e \right] m(\sigma) f d^3c_g de d\sigma .$$

- des termes de diffusion tels que :

$$G_{pi} = \iiint (c_i - u_{pi})(e - e_p) m(\sigma) f d^3c_g de d\sigma ,$$

$$L_p = \iint M (e - e_p) f d^3c_g de d\sigma .$$

On remarque que l'énergie est conservée dans les collisions, si bien que les termes du second membre sont nuls.

L'équation de l'énergie s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p e_p) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_p u_{pi} e_p) = Q + \dot{w}_p e_p - \sum_i \frac{\partial G_{pi}}{\partial x_i} + L_p .$$

Elle peut être combinée à l'équation de continuité multipliée par e_p , pour donner :

$$\rho_p \frac{\partial e_p}{\partial t} + \rho_p \vec{u}_p \cdot \vec{\text{grad}}\, e_p = Q - \text{div}\, \vec{G}_p + L_p$$

La forme de cette équation est celle relative à un écoulement homogène comportant une source de chaleur, le terme de pression n'existant cependant pas ici.

Par combinaison des équations de quantité de mouvement et de l'énergie, on établit l'équation pour l'énergie totale :

$$\rho_p \frac{\partial}{\partial t}\left(e_p + \frac{u_p^2}{2} \right) + \rho_p \vec{u}_p \cdot \vec{\text{grad}} \left(e_p + \frac{u_p^2}{2} \right)$$

$$= \vec{u}_p \cdot \vec{F} + Q + \vec{u}_p \cdot \text{div}\, \vec{D}_p - \text{div}\, \vec{G}_p + \vec{u}_p \cdot \vec{K}_p + L_p .$$

Les équations générales de la phase condensée se présentent donc sous une forme classique, les interactions avec la phase gazeuse se traduisant par des termes de source et la définition des grandeurs moyennes par des termes complémentaires. On peut définir une dérivée dans le mouvement barycentrique par :

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{u}_p \cdot \overrightarrow{grad}(\ ).$$

4,2.5. Bilan entropique

Le facteur multiplicatif est $m(\sigma)\, s$. L'entropie massique de la phase condensée est obtenue par sommation :

$$s_p = \frac{1}{\rho_p} \iiint m(\sigma) s f \, d^3c_j \, de \, d\sigma .$$

L'équation de s_p est établie comme les autres équations et des termes nouveaux doivent être définis. Cette équation peut être combinée à l'équation de l'énergie de telle manière que :

$$T_p \frac{ds_p}{dt} = \frac{de_p}{dt} + T_p \mathcal{G}_p .$$

$\mathcal{G}_p$ est un terme lié d'une part à la dispersion des grandeurs moyennes et, d'autre part, aux échanges irréversibles se produisant au cours des collisions (particules liquides). La présence de ce terme est un obstacle à l'étude du mélange biphasique par les méthodes classiques de la thermodynamique car il met en défaut l'hypothèse de l'équilibre local [41]. Fort heureusement, on montre que $\mathcal{G}_p$ est du second ordre par rapport aux écarts de température ; dans la plupart des cas il sera donc négligé.

4,3. ÉQUATIONS DE LA PHASE GAZEUSE

L'établissement des équations de la phase gazeuse, même pour un mélange multiréactif, est plus classique [42] ; ces équations seront donc établies plus succinctement. Elles doivent être toutefois modifiées ici pour tenir compte de la présence de la phase condensée. Par rapport aux équations d'un fluide homogène, une particularité réside en plus dans la définition des masses volumiques. On définit, en effet, une masse volumique fictive ρ_j pour chaque espèce j qui est supposée occuper tout le volume du mélange ; cette quantité est liée à la masse volumique vraie ρ_{gj} par la relation :

$$\rho_j = \rho_{gj} (1-\varepsilon).$$

Dans l'équation générale de bilan, ce sont les quantités ρ_j qui sont à utiliser alors que dans les équations d'état ce sont les ρ_{gj} . Il faut toute-

fois remarquer que dans le type de suspension étudié, la fraction volumique ε occupée par la phase condensée est toujours très petite, de sorte que les différences entre les ρ_j et les ρ_{gj} sont négligeables.

4,3.1. Equation de continuité

L'équation de continuité pour chaque espèce fait apparaître les taux de production massique $\dot{w}_j$. Le principe de conservation de la masse dans les réactions chimiques se traduit par :

$$\sum_{j=1}^{N} \dot{w}_j = - \dot{w}_p .$$

Si Y_j est la fraction massique de l'espèce j dans le mélange gazeux, l'équation de continuité correspondante est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_j) + \operatorname{div}(\rho Y_j \vec{v_j}) = \dot{w}_j ,$$

où ρ est la masse volumique de la phase gazeuse obtenue par sommation :

$$\rho = \sum_{j=1}^{N} \rho_j .$$

La vitesse barycentrique de la phase gazeuse est définie par :

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{N} Y_j \vec{v_j} .$$

La vitesse de diffusion de l'espèce j dans le mouvement barycentrique sera donc donnée par :

$$\vec{V_j} = \vec{v_j} - \vec{u} .$$

En exprimant $\vec{v_j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{V_j}$ dans l'équation de continuité de l'espèce j puis en sommant sur toutes les espèces, on aboutit à l'équation globale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = - \dot{w}_p .$$

Cette équation ne se distingue de l'équation classique que par le terme de source du second membre. Elle peut être réécrite en introduisant la dérivée particulaire dans le mouvement barycentrique :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = - \dot{w}_p .$$

4,3.2. Equation de quantité de mouvement

La variation de quantité de mouvement d'un volume quelconque est due aux contraintes de surface, aux forces de volume, à la production des espèces et à l'action de la phase condensée. Il intervient donc dans l'équation de quantité de mouvement les termes tels que :

- le tenseur de diffusion dont les composantes sont définies par :

$$D_{ik} = -\rho \sum_{j=1}^{N} Y_j V_{ji} V_{jk} ,$$

- les tenseurs des contraintes qui se décomposent de façon classique en un terme de pression et un terme de viscosité :

$$\vec{\vec{\sigma}}_j = -P_j \vec{\vec{\delta}} + \vec{\vec{\tau}}_j ,$$

d'où par sommation :

$$\vec{\vec{\sigma}} = -p \vec{\vec{\delta}} + \vec{\vec{\tau}} .$$

Il vient finalement, après combinaison avec l'équation de continuité :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \overrightarrow{grad}\, p = \overrightarrow{div}\,(\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{D}}) + \rho \vec{g} - \vec{F}_{P_2} + (\vec{u} - \vec{u}_P) \dot{w}_P - \vec{K}_P .$$

Cette équation ne diffère de son expression classique que par l'existence de termes dus à la phase condensée. On remarquera que c'est seulement la composante d'interaction entre les deux phases qui intervient dans les forces.

L'équation pour l'énergie cinétique est déduite sans difficulté de l'équation de quantité de mouvement.

4,3.3. Equation de l'énergie

Pour établir l'équation de l'énergie, on raisonne sur l'énergie totale. Sa variation dans un volume quelconque résulte du travail des contraintes de surface et des forces de volume, du transfert thermique par conduction et des échanges avec la phase condensée. Il apparaît les termes classiques tels que :

- la fonction de dissipation :

$$\Phi = (\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{D}}) : \overrightarrow{grad}\, \vec{u} ,$$

- la densité de flux thermique $\vec{q}^*$ modifiée pour tenir compte des effets de la diffusion.

Avec les simplifications habituelles et après combinaison de l'équation

obtenue avec celles de continuité et de l'énergie cinétique, on obtient finalement :

$$\rho \frac{de}{dt} + p\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \Phi + \mathrm{div}\,\vec{q}^{*} =$$

$$= \dot{w}_p \left(e - e_p + \frac{u^2 - u_p^2}{2} - \vec{u}(\vec{u} - \vec{u}_p) \right) + (\vec{u} - \vec{u}_p).(\vec{F}_{p_2} + \vec{K}_p) - (Q + L_p).$$

Le premier membre de cette équation est classique ; quant au second, il regroupe tous les termes d'interaction avec la phase condensée.

L'équation de l'enthalpie se déduit aisément de la précédente :

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - \Phi + \mathrm{div}\,\vec{q}^{*} =$$

$$= \dot{w}_p \left(h - e_p + \frac{u^2 - u_p^2}{2} - \vec{u}.(\vec{u} - \vec{u}_p) \right) + (\vec{u} - \vec{u}_p).(\vec{F}_{p_2} + \vec{K}_p) - (Q + L_p).$$

4,3.4. Bilan entropique

Entre l'entropie, l'énergie interne, la masse volumique et les fractions massiques existe la relation de Gibbs :

$$de = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho + \sum_{j=1}^{N} \mu_j\,dY_j ,$$

où μ_j est le potentiel chimique massique de l'espèce j.

L'équation de l'entropie massique se déduit donc des équations précédemment établies. Il apparaît que le flux entropique n'est pas modifié par la présence de la phase condensée qui, par contre, se manifeste comme production interne, ce qui correspond bien au caractère irréversible des échanges entre phases.

4,4. ÉQUATIONS DU MÉLANGE

Bien que les équations des deux phases suffisent en principe à décrire l'écoulement, il peut être intéressant d'étudier le comportement moyen du mélange. Comme pour la phase condensée, il s'agit tout d'abord de définir convenablement les grandeurs moyennes puis d'établir les équations correspondantes.

4,4.1. Equation de continuité

La masse volumique du mélange s'écrit simplement :

$$\overline{\rho} = \rho + \rho_p \cdot$$

La vitesse barycentrique est définie par la relation :

$$\overline{\rho}\,\vec{u} = \rho\vec{u} + \rho_p\vec{u}_p \cdot$$

Des vitesses de diffusion des phases dans le mouvement barycentrique peuvent alors être introduites :

$$\vec{V} = \vec{u} - \vec{u} \ ,$$

$$\vec{V}_p = \vec{u}_p - \vec{u} \ .$$

Par addition des équations de continuité des deux phases, on obtient directement l'équation globale de continuité :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\rho}\,\vec{u}) = 0 \ .$$

Une nouvelle dérivée particulaire dans le mouvement barycentrique du mélange peut être définie par :

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{u}\cdot\operatorname{grad}(\ ),$$

si bien que l'équation globale de continuité s'écrit :

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} + \overline{\rho}\operatorname{div}\vec{u} = 0 \ .$$

4,4.2. Equation de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement des deux phases peuvent être présentées sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p\vec{u}_p) + \operatorname{div}(\rho_p\vec{u}_p \otimes \vec{u}_p) = \vec{F}_p + \mathring{w}_p\vec{u}_p + \operatorname{div}\vec{\mathcal{D}}_p + \vec{K}_p \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \operatorname{div}(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\vec{\tau} + \vec{\mathcal{D}}) + \rho\vec{g} - \vec{F}_{p_2} - \mathring{w}_p\vec{u}_p - \vec{K}_p \ .$$

Définissons un tenseur de diffusion biphasique par :

$$\vec{\vec{D}} = -(\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + \rho_p \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p) ,$$

et un tenseur de diffusion généralisée par :

$$\vec{\vec{\mathcal{D}}} = \vec{\vec{D}} + \vec{\vec{D}}_p + \vec{\vec{D}} .$$

L'addition des deux équations précédentes conduit directement à l'équation recherchée :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\vec{u}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\vec{u}\otimes\vec{u}) = -\operatorname{grad} p + \bar{\rho}\vec{g} + \operatorname{div}(\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\mathcal{D}}}),$$

ou encore, par combinaison avec l'équation de continuité :

$$\bar{\rho}\frac{d\vec{u}}{dt} + \operatorname{grad} p - \rho\vec{g} - \operatorname{div}(\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\mathcal{D}}}) = 0 .$$

L'équation de l'énergie cinétique en est déduite :

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = \bar{\rho}\vec{g}.\vec{u} - \vec{u}.\operatorname{grad} p + \vec{u}.\operatorname{div}(\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\mathcal{D}}}) .$$

4,4.3. Equation de l'énergie

L'énergie interne massique est obtenue par sommation :

$$\bar{\rho}\bar{e} = \rho e + \rho_p e_p .$$

L'enthalpie massique s'en déduit immédiatement :

$$\bar{h} = \bar{e} + \frac{p}{\rho} .$$

Les équations de l'énergie pour chaque phase peuvent être écrites :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p e_p) + \operatorname{div}(\rho_p e_p \vec{u}_p) = Q + \dot{w}_p e_p - \operatorname{div}\vec{G} + L_p ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{u}) = -p\operatorname{div}\vec{u} + \Phi - \operatorname{div}\vec{q}^* + \dot{w}_p\left(-e_p + \frac{u^2-u_p^2}{2} - \vec{u}.(\vec{u}-\vec{u}_p)\right) + (\vec{u}-\vec{u}_p).(\vec{F}_{p_2}+\vec{K}_p) - (Q+L_p) .$$

Par addition, on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{e}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{e}\vec{u}) = -p\operatorname{div}\vec{u} + \Phi - \operatorname{div}\vec{q}^* - \operatorname{div}(\rho e\vec{V} + \rho_p e_p \vec{V}_p) + \dot{w}_p\left(\frac{u^2-u_p^2}{2} - \vec{u}.(\vec{u}-\vec{u}_p)\right) + (\vec{u}-\vec{u}_p)(\vec{F}_{p_2}+\vec{K}_p) - \operatorname{div}\vec{G} .$$

Il convient donc de définir une fonction de dissipation généralisée et une densité de flux thermique globale à l'aide des relations :

$$\bar{\Phi} = \Phi + \vec{V}.\overrightarrow{grad}\,p + \dot{w}_p\left(\frac{u^2-u_p^2}{2} - \vec{u}.(\vec{u}-\vec{u}_p)\right) + (\vec{u}-\vec{u}_p).(\vec{F}_{p_2} + \vec{K}_p)\ ,$$

$$\vec{q} = \vec{q}^* + \rho h \vec{V} + \rho_c \alpha_p \vec{V}_p + \vec{G}\ .$$

L'équation de l'énergie prend alors une forme classique après combinaison avec l'équation de continuité :

$$\bar{\rho}\frac{d\bar{e}}{dt} = -p\,div\,\vec{u} + \bar{\Phi} - div\,\vec{q}\ .$$

L'équation de l'enthalpie s'en déduit immédiatement :

$$\rho\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{dp}{dt} + \bar{\Phi} - div\,\vec{q}\ .$$

4,4.4. Bilan entropique

Le mélange biphasique doit être considéré comme un système composite formé de deux sous-systèmes qui ne sont pas en équilibre mutuel mais qui, individuellement, sont en équilibre et peuvent par conséquent être décrits par une équation d'état.

Les équations d'état, pour une quantité quelconque de mélange, sont écrites. En exprimant que l'énergie interne et l'entropie sont des grandeurs additives, on parvient à l'équation du mélange puis à son équation de Gibbs. En passant au mouvement barycentrique dans le mélange, puis en exprimant les dérivées particulaires à l'aide des équations déjà établies, on arrive à une expression générale de la forme :

$$\bar{\rho}\frac{d\bar{s}}{dt} = -div\,\vec{J}_s + \bar{\sigma}_s\ .$$

Le flux entropique $\vec{J}_s$ comporte un terme de transfert thermique et des termes de diffusion. La production $\bar{\sigma}_s$ se décompose principalement en termes relatifs à la phase gazeuse (dissipation, réactions chimiques et flux thermique) et en termes dus aux échanges biphasiques.

Il est intéressant de fixer l'ordre de grandeur relatif de ces différents termes de production. Prenons le cas d'un écoulement permanent par tranches. La dissipation visqueuse dans la phase gazeuse est donnée par l'expression :

$$\Phi \simeq \frac{4}{3}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)^2\ ,$$ (hypothèse de Stokes).

Le terme de frottement de la phase condensée est approximativement :

$$F_p(u-u_p) = \frac{18\rho_p\mu(u-u_p)^2}{\rho_c d_p^2}\ ,$$ (régime de Stokes et diamètre des particules uniforme),

soit, en utilisant l'hypothèse du proche équilibre :

$$F_p(u-u_p) = \frac{\alpha \rho_p \bar{d}_p^2}{18\mu} u^2 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 .$$

Le rapport du terme de production dû à la phase condensée à celui dû à la phase gazeuse se met finalement sous la forme :

$$\frac{1}{24\varepsilon} \left(\frac{\rho_p u \bar{d}_p}{\mu}\right)^2 .$$

Pour des conditions de fonctionnement réalistes, le nombre de Reynolds apparaissant dans la parenthèse est toujours supérieur à 1 ; ε est aussi très petit. On peut donc dire que dans les écoulements de suspension, les échanges irréversibles entre phases sont presque exclusivement à l'origine de l'accroissement de l'entropie au sein de l'écoulement.

Les phénomènes de dégradation des performances doivent donc être en priorité étudiés sous l'angle des effets biphasiques. Il est certain que ces effets sont plus marqués dans les zones où existent de forts gradients de vitesse et de température, et en particulier dans la tuyère.

4,5. APPLICATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES A L'ÉCOULEMENT D'UNE SUSPENSION DANS UNE TUYÈRE

En dehors des effets biphasiques que l'on cherche à préciser et qui sont liés à l'existence d'une phase condensée de caractéristiques complexes (large spectre des particules, croissance par agglomération), il faudrait en principe tenir compte dans le schéma d'écoulement retenu de phénomènes plus classiques tels que les pertes de paroi et les réactions chimiques en phase gazeuse car l'écoulement étudié ici se fait à haute température et à haute pression. En pratique, ces phénomènes dépendent aussi en partie de la phase condensée et même s'il est possible d'établir les équations de l'écoulement le plus général, le problème numérique correspondant dépasse les possibilités des moyens de calcul existants [30]. Force est donc de procéder à des simplifications portant soit sur la phase condensée, soit sur la phase gazeuse, soit sur le nombre de dimensions considérées. En raison du grand nombre de simplifications qui peuvent être introduites, une bibliographie abondante a été consacrée à l'écoulement des suspensions dans les tuyères. Cependant, bien peu des schémas de calcul présentés sont suffisamment réalistes pour conduire à des résultats sûrs.

Il n'est toutefois pas inutile, afin de mettre en évidence certains caractères communs à ce type d'écoulement , de partir des bases les plus élémentaires. On rappellera donc les résultats du modèle le plus simplifié avant de s'attacher à définir les exigences d'un modèle réaliste.

4,5.1. Modèle simplifié d'écoulement

Les hypothèses suivantes sont faites :

- l'écoulement permanent se fait par tranches,

- les particules ont un diamètre uniforme et sont régulièrement réparties dans la phase gazeuse ; elles ne subissent ni collisions, ni changement de phase, leur volume est négligeable dans le mélange et leurs propriétés physiques sont constantes,

- la phase gazeuse est constituée d'un gaz parfait non visqueux (excepté en ce qui concerne son action sur les particules), dont les propriétés sont constantes,

- les échanges entre phases sont calculés pour le régime de Stokes,

- les interactions de l'écoulement avec la paroi de la tuyère sont négligées.

Les équations de ce type d'écoulement sont assez classiques [5]. Ce sont les trois équations de conservation pour chaque phase, obtenues facilement à partir des équations générales du chapitre 4, et l'équation d'état du gaz. Il est intéressant de combiner les équations de quantité de mouvement et d'énergie des deux phases afin d'éliminer les termes d'échange en F et Q. Il vient finalement :

$$
\begin{cases}
\rho u A = \dot{m}\,, \\
\rho_p u_p A = \dot{m}_p\,, \\
\rho u \dfrac{du}{dx} + \rho_p u_p \dfrac{du_p}{dx} + \dfrac{dp}{dx} = 0\,, \\
\rho u \dfrac{d}{dx}\left(C_p T + \dfrac{u^2}{2}\right) + \rho_p u_p \dfrac{d}{dx}\left(C_s T_p + \dfrac{u_p^2}{2}\right) = 0\,, \\
u_p \dfrac{du_p}{dx} = \dfrac{1}{\tau_u}(u - u_p)\,, \\
u_p \dfrac{dT_p}{dx} = \dfrac{1}{\tau_T}(T - T_p)\,, \\
p = \rho r T.
\end{cases}
$$

On peut éliminer les masses volumiques et la pression en remarquant que les débits massiques sont dans un rapport constant K et intégrer l'équation globale de l'énergie. On notera :

- H, l'enthalpie massique du mélange dans les conditions génératrices (équilibre des phases),

- $\mathcal{F} = \dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dx}$, la fonction de l'abscisse caractérisant l'évolution de la section droite.

Le système se réduit à :

$$\begin{cases} \left(1-\frac{rT}{u^2}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2}\right)+r\frac{dT}{dx} = rT\Gamma^p - Ku\frac{du_p}{dx}, \\ c_pT+\frac{u^2}{2}+K\left(c_sT_p+\frac{u_p^2}{2}\right)=H(1+K), \\ u_p\frac{du_p}{dx}=\frac{1}{\tau_u}(u-u_p), \\ u_p\frac{dT_p}{dx}=\frac{1}{\tau_T}(T-T_p). \end{cases}$$

Plutôt que d'éliminer T dans l'équation de l'énergie pour se ramener à trois équations différentielles en u, u_p, T_p, nous avons préféré faire apparaître des grandeurs réduites et les déséquilibres en phases en posant :

$$m=\frac{1}{\gamma M^2}=\frac{rT}{u^2},$$

$$n=\frac{u_p}{u},$$

$$p=\frac{T_p}{T}.$$

La fonction m a été préférée au nombre de Mach M dans le gaz pour faciliter l'écriture des équations ; on passe aisément de m à M. Une variable réduite peut être introduite, ainsi qu'une nouvelle fonction F :

$$X=\frac{x}{\tau_u\sqrt{2H(1+K)}},$$

$$F=\frac{1}{A}\frac{dA}{dX}.$$

Après transformation, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dm}{dX}=-\frac{m\left(2m+\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\gamma}-m}F-\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m(1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-n}{n}+(m+1)\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right)\frac{1-n}{n}+\frac{2}{3\sigma_r}\frac{1-p}{n}m}{\frac{1}{\gamma}-m}\right], \\ \frac{dn}{dX}=-\frac{mn}{\frac{1}{\gamma}-m}F+\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m(1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-n}{n}-Kn\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right)\frac{1-n}{n}+\frac{2}{3\sigma_r}\frac{1-p}{n}m}{\frac{1}{\gamma}-m}\right], \\ \frac{dp}{dX}=\frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}p}{\frac{1}{\gamma}-m}F+\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m(1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3\sigma_r}\frac{1-p}{\beta n}+\frac{Kp}{m}\left(\frac{1-n}{n}+(1-m)\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right)\frac{1-n}{n}+\frac{2}{3\sigma_r}\frac{1-p}{n}m}{\frac{1}{\gamma}-m}\right)\right] \end{cases}$$

Ces équations définissent une classe d'écoulements caractérisés par le paramètre de charge K, le facteur thermique β, le nombre de Prandtl du gaz (souvent pris égal à $\frac{2}{3}$) et la fonction F qui dépend du profil de la tuyère, de son échelle (fixée par le rayon du col r_c, par exemple) et du paramètre adimensionnel :

$$\frac{\tau_u u_L}{r_c},$$

où u_L est la vitesse limite du mélange à l'équilibre ($u_L=\sqrt{2H}$).

Il existe un point singulier pour $m = \frac{1}{\gamma}$ c'est-à-dire lorsque la célérité du son est atteinte par le gaz. Au point sonique, on doit vérifier :

$$F + K\left(1+Kn^2+\frac{2}{\gamma-1}(1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-p}{n}+\gamma\frac{1-n}{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right)\right) = 0 \quad .$$

Dans une tuyère la vitesse augmente dans la détente tandis que la température diminue, ce qui impose :

$$n < 1 \quad , \quad p > 1 \quad .$$

On en déduit la condition pour M = 1:

$$\frac{1-p}{n} + \gamma\frac{1-n}{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right) < 0$$

Cette inégalité implique que la section sonique se situe toujours à l'aval du col géométrique ($F > 0$).

La singularité pour $m=\frac{1}{\gamma}$ correspond à une condition limite. Les deux autres conditions nécessaires pour définir complètement le problème sont les données des valeurs de n et p à l'entrée de la tuyère par exemple.

Toutes les grandeurs de l'écoulement se déduisent de m, n, p, en particulier l'impulsion spécifique délivrée par la tuyère :

$$I = \frac{\sqrt{2H(1+K)}}{g_0(1+K)}\left\{\frac{1+Kn}{\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m(1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}_{x=x_s} .$$

L'impulsion spécifique est donc affectée par les valeurs des grandeurs m, n, p, prises dans la section de sortie, lesquelles dépendent de toute l'histoire de l'écoulement depuis l'entrée de la tuyère, ne serait-ce qu'à cause du déplacement de la section sonique due aux déphasages.

La variation de l'entropie massique du mélange est donnée par la relation :

$$\frac{1}{r}\frac{d\bar{s}}{dx} = \frac{K}{1+K}\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m(1+K\beta p)\right)\left[\frac{(1-n)^2}{nm}+\frac{2}{3\sigma_r}\frac{(1-p)^2}{np}\right] .$$

L'accroissement local de l'entropie du mélange dépend bien du carré des écarts cinétique et thermique.

Une simplification importante se produit lorsque l'on suppose que l'équilibre entre phases est localement réalisé en tout point de la tuyère.

En repartant du système initial d'équations -sans les équations de la phase condensée, remplacées par les deux hypothèses de l'équilibre cinétique et de l'équilibre thermique-, il est aisé de montrer que le mélange se comporte comme un gaz parfait non visqueux ; cette particularité peut être retrouvée à partir des équations générales du mélange (§ 4.4) : le mélange obéit aux équations d'un gaz dont la viscosité apparente devient négligeable lorsque les écarts entre phases sont faibles. Les propriétés du gaz équivalent se calculent aisément :

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma(1+K\beta)}{1+K\beta\gamma} \quad ,$$

$$\overline{\gamma} = \frac{\gamma}{1+K} .$$

Un nouveau nombre de Mach pour le mélange peut alors être défini, basé sur la célérité du son à l'équilibre ($a_e^2 = \overline{\gamma} r T$). La relation entre la section droite de la tuyère et le nombre de Mach à l'équilibre est donnée par la relation classique :

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{\overline{M}} \left(\frac{1 + \frac{\overline{\gamma}-1}{2} \overline{M}^2}{\frac{\overline{\gamma}+1}{2}} \right)^{\frac{\overline{\gamma}+1}{2(\overline{\gamma}-1)}} .$$

Il existe, entre les deux nombres de Mach, la relation :

$$\overline{M} = M \sqrt{\frac{(1+K)(1+K\beta\gamma)}{1+K\beta}} .$$

Cette relation montre qu'au col géométrique : $\overline{M} = 1$ et $M < 1$; la section sonique pour le gaz se situe bien dans le divergent.

L'intérêt de la simplification de l'équilibre biphasique est de conduire à la définition d'un écoulement de référence : cet écoulement constitue la limite de l'écoulement réel lorsque, à taux de charge constant, le diamètre des particules devient infiniment petit ; il fixe la borne supérieure des performances d'une tuyère pour une suspension donnée.

On examinera brièvement les méthodes de calcul lorsque les écarts cinétique et thermique entre phases sont pris en compte.

a) Solutions analytiques :

On connaît pour certains types de tuyère des solutions analytiques du problème. Les profils ne sont pas connus à priori mais déduits des autres grandeurs en supposant une loi de variation donnée pour l'une d'entre elles ; le problème se ramène alors à des quadratures.

La solution la plus classique est celle des tuyères à "déphasages constants" [44, 45]. Supposons, en effet, le rapport n des vitesses des deux phases constant. L'équation du mouvement des particules s'intègre pour donner :

$$u = \frac{1}{\tau_u} \frac{1-n}{n^2} x ,$$

$$u_p = \frac{1}{\tau_u} \frac{1-n}{n} x .$$

Si l'on suppose par ailleurs constant le rapport :

$$q = \frac{T_0 - T_p}{T_0 - T} ,$$

l'équation thermique des particules et l'équation globale de l'énergie sont cohérentes pourvu que n et q soient liés par la relation :

$$\frac{1-q}{q} = 3\sigma_r \beta \frac{1-n}{n} .$$

Il vient alors :

$$T_0 - T = \frac{1+Kn^2}{2} \left(\frac{1}{\tau_u} \frac{1-n}{n^2} \right)^2 \frac{x^2}{c_p + K c_s q} ,$$

$$T_0 - T_p = \frac{1+Kn^2}{2} \left(\frac{1}{\tau_u} \frac{1-n}{n^2} \right)^2 \frac{x^2 q}{c_p + K c_s q} .$$

La tuyère est comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = x_1$, pour laquelle la vitesse limite de l'écoulement est atteinte ; la section de la tuyère pour ces deux valeurs de l'abscisse est infinie. On conçoit donc bien que les profils de tuyère correspondants ont un convergent et un divergent très ouverts ; le col est par ailleurs très long.

Il est possible de montrer que le mélange se comporte comme un gaz ; les propriétés de ce gaz équivalent dépendent de Π dont le choix fixe la longueur de la tuyère.

En raison de leur forme, les tuyères à "déphasages constants" sont peu utilisées pour la propulsion ; elles conduiraient à des pertes accrues, principalement à cause de la forte divergence du jet. Cependant, cette théorie est parfois utilisée pour calculer une estimation grossière de la perte due aux déphasages pour une tuyère donnée : on sait que les déphasages sont maximaux dans la région du col ; on assimilera donc le col de la tuyère à une tuyère à "déphasages constants". La relation suivante sera utilisée :

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_c - \frac{2}{\bar{\gamma}+1}\sqrt{\frac{\bar{\gamma}\bar{r}T_0}{r_c R_c}} = \frac{1}{\bar{r}u}\,\frac{1-\Pi}{\Pi^2}\,\frac{1+K\Pi}{1+K}$$

$\bar{\gamma}$ et $\bar{r}$ dépendent de Π ; on obtient donc une équation algébrique pour Π qui est résolue en fonction des données du problème.

Cette technique de calcul peut être étendue à d'autres profils de tuyère, soit en considérant une fonction $n(x)$ donnée [33], soit une fonction $u_p(x)$ donnée [46,47]. Le recours au calcul numérique est en général indispensable sauf pour les lois : $u_p = kx$ et $u_p = k\sqrt{x}$.

b) Solutions approchées :

Les équations proposées sont valables quels que soient le taux de charge de l'écoulement et le diamètre des particules. Les écoulements étudiés ici sont caractérisés par un taux de charge modéré et des particules de taille microscopique, et il est légitime de rechercher si ces particularités ne sont pas à l'origine de simplifications intéressantes.

Les équations générales peuvent être ramenées à une forme adimensionnelle. Le paramètre caractérisant la dimension des particules s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{\bar{r}u\,u_t}{r_c},$$

le rayon du col étant, par exemple, choisi comme longueur de référence. Ce paramètre est, au plus, de l'ordre de l'unité pour de gros propulseurs. Il peut donc servir à la limite comme paramètre de perturbation [5, 48]. Le principe de la méthode de perturbation consiste à admettre que toutes les fonctions peuvent être développées suivant une certaine séquence de fonctions de $\mathcal{E}$ (les puissances entières de $\mathcal{E}$, dans un grand nombre de problèmes). Par exemple, on écrira :

$$u = u_0 + \mathcal{E}u_1 + \mathcal{E}^2 u_2 + \dots,$$

$$u_s = u - u_p = u_{s_0} + \mathcal{E}u_{s_1} + \mathcal{E}^2 u_{s_2} + \dots.$$

Le système initial d'équations conduit par identification des puissances de $\mathcal{E}$ à une série de nouvelles équations permettant de déterminer successivement les fonctions de u_0, u_{s_0} ....., u_1, u_{s_1} ..... etc... Les calculs sont rare-

ment poussés au delà du premier ordre en raison de la complexité croissante des expressions. L'équation du mouvement des particules s'écrit, en variables réduites :

$$\varepsilon u_p^* \frac{du_p^*}{dx} = u^* - u_p^* = u_s^*$$

soit, après avoir substitué à u_p^* et u_s^* leurs développements en ε et ordonné les puissances de ε dans chaque membre :

$$\varepsilon (u_o^* - u_{so}^*) \frac{d}{dx}(u_o^* - u_{so}^*) + \varepsilon^2 \left[(u_1^* - u_{s_1}^*) \frac{d}{dx}(u_o^* - u_{so}^*) + (u_o^* - u_{so}^*) \frac{d}{dx}(u_1^* - u_{s_1}^*) \right]$$
$$+ \ldots\ldots = u_{so}^* + \varepsilon u_{s_1}^* + \varepsilon^2 u_{s_2}^* + \ldots\ldots$$

Il vient immédiatement :

$$u_{so}^* \equiv 0 ,$$

puis :

$$u_{s_1}^* = u_o^* \frac{du_o^*}{dx} .$$

On trouve de même :

$$T_{so} \equiv 0 ,$$

$$T_{s_1} = \frac{3\sigma_r}{2} u_o^* \frac{dT_o}{dx} .$$

Ces relations signifient d'une part, que l'écoulement non perturbé ($\varepsilon = 0$) est celui correspondant à l'équilibre biphasique et, d'autre part, que les premiers termes de la perturbation se déduisent de l'état local de l'écoulement non perturbé. Il s'agit donc d'une théorie asymptotique lorsqu'elle est limitée au premier ordre : les temps de relaxation biphasique sont suffisamment petits devant le temps de séjour dans la tuyère, de sorte que la phase condensée atteint quasi instantanément un état fixé par les gradients de l'écoulement de référence. On juge de la validité de cette hypothèse en écrivant par exemple :

$$\varepsilon \frac{u_{s_1}}{u_o} \ll 1 .$$

Pour les tuyères classiques, le gradient de vitesse est maximal dans la région du col. Il faut donc vérifier :

$$\frac{2\tau_u}{\gamma+1} \sqrt{\frac{\gamma r T_o}{r_c R_c}} \ll 1 .$$

Cette condition est remplie pour les propulseurs assez importants et la grande majorité des particules. Cette méthode peut donc faire l'objet d'applications intéressantes ; il faut toutefois remarquer que les déphasages ainsi calculés présentent des discontinuités de pentes liées aux discontinuités de courbure de la méridienne (tuyères biconiques, par exemple). Ces calculs sont inadaptés à certains types de profils (tuyères à col cylindrique).

Lorsque les particules ne sont plus suffisamment petites pour que la théorie du proche équilibre puisse s'appliquer, on peut procéder par approximations successives [49]. L'écoulement de référence correspondant à l'équilibre des phases, on étudie l'évolution de la vitesse et de la température des particules dans cet écoulement. On peut ainsi calculer les termes d'interaction entre phases en première approximation, puis donner une seconde approximation de l'écoulement gazeux .....

Dans cette méthode, qui tient compte des phénomènes de relaxation entre phases, le recours au calcul numérique est nécessaire.

c) Solutions numériques :

Le traitement numérique du système d'équations différentielles réduites est rendu difficile d'une part par l'existence d'un point singulier pour $m = \frac{1}{\gamma}$ ($M = 1$, dans le gaz) et d'autre part par le fait que la position de ce point singulier n'est pas connue a priori. Pour une tuyère donnée, il n'existe qu'une valeur initiale m_o qui permet le passage du point singulier ; toutes les valeurs différentes de cette valeur propre conduisent à des solutions à branches infinies physiquement inacceptables. Le problème numérique lié à la recherche de cette valeur initiale a été assez peu explicité [50, 51, 52]. Un changement de variable de la forme :

$$Z = \left(\frac{1}{\gamma} - m\right)^2 ,$$

peut être utilisé [53].

Un programme de calcul a été mis au point avec l'aide du centre de calcul de l'ONERA. Il comporte les trois parties suivantes :

- recherche de la valeur initiale m_o :
  cette recherche se fait par approximations successives. Si la valeur choisie est trop forte, on observe l'annulation de $\frac{dm}{dx}$ au cours d'un pas de calcul. Si la valeur choisie est trop faible, $\frac{1}{\gamma} - m$ s'annule au cours d'un pas de calcul sans que la condition en Π, p, F soit remplie. En partant de deux valeurs extrêmes données par les deux hypothèses : écoulement en équilibre biphasique, écoulement d'un gaz seul, on réduit ainsi progressivement l'intervalle où peut se trouver m_o. Le calcul est effectué en double précision.

- passage du point singulier :
  lorsqu'on estime que la valeur m_o est suffisamment approchée, c'est-à-dire que l'intégration peut être effectuée jusqu'à une valeur très voisine de sans difficulté, on passe le point singulier par une méthode analytique, par exemple en supposant que Δ_p est fonction linéaire de x. Des valeurs sont ainsi définies peu après le point singulier.

- intégration dans la zone supersonique de la tuyère ;

Les temps de calcul sont assez longs même pour un ordinateur de grande capacité (IBM 360). Pour cette raison et, également, à cause de la médiocre représentativité du modèle utilisé, ces calculs n'ont pas été effectués systématiquement.

On donne sur la figure 21 les résultats Π et p, dans des conditions de fonctionnement données. L'approximation du proche équilibre est indiquée pour comparaison, l'écart avec les calculs est important malgré la forte valeur du rapport du rayon de courbure du col au rayon du col. On vérifie en effet que la théorie du proche équilibre n'est pas applicable dans ce cas :

$$\frac{2\alpha}{\gamma+1}\sqrt{\frac{\gamma r T_o}{r_c R_c}} = 0{,}712 .$$

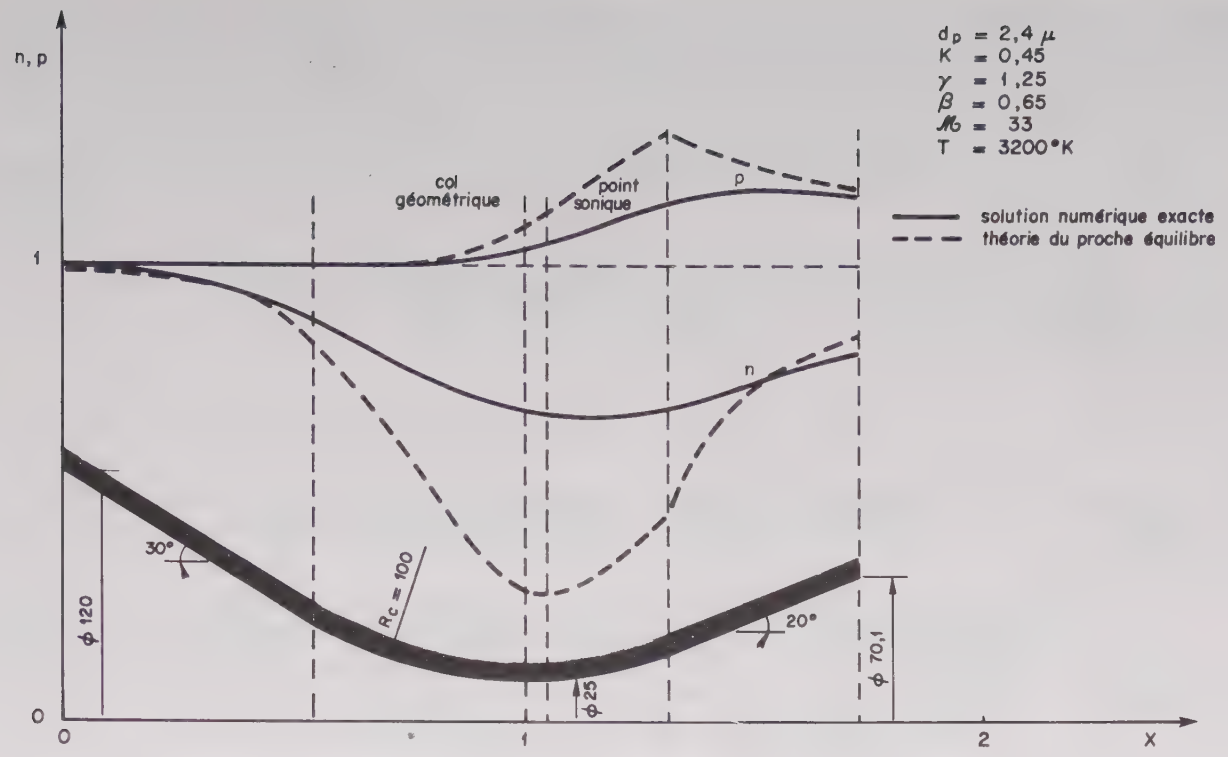


Fig. 21 - Déphasages cinétique et thermique dans une tuyère biconique (modèle simplifié).

4,5.2. Représentativité du modèle simplifié

Il convient de rechercher si le schéma simplifié qui vient d'être présenté est suffisamment réaliste pour la suspension étudiée. On doit examiner successivement si le comportement de la phase gazeuse ou de la phase condensée est bien représenté et si l'hypothèse d'un écoulement par tranches est suffisante.

a) Comportement de la phase gazeuse :

La phase gazeuse n'est pas un gaz parfait, il s'agit, au contraire, d'un mélange multiréactif à haute température et à haute pression. Les relaxations chimiques rendent difficile le traitement numérique de ce type d'écoulement. L'assimilation de la phase gazeuse à un gaz de Lighthill permettrait en principe de tenir compte de la relaxation chimique ; nous avons montré que le système comporte alors quatre équations pour la vitesse et la température du gaz et les déphasages Γ et P, et que le point singulier est atteint lorsque la vitesse du gaz est égale à la célérité du son figée dans le gaz. Malheureusement, cette assimilation est ici assez peu réaliste. Aussi se contente-t-on généralement de calculs réalisés dans l'hypothèse du figeage des réactions dans les conditions de chambre (vitesses de réaction infiniment lentes) ou dans l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique toujours réalisé (vitesses de réaction infiniment rapides). Dans l'une ou l'autre de ces conditions et en tenant compte des propriétés thermodynamiques réelles des produits de combustion, le système d'équations ne peut être réduit comme dans le schéma simplifié mais son traitement ne pose pas de problèmes supplémentaires .

On doit également tenir compte de la variation des paramètres de transfert avec la température. On peut tenir compte de cette variation lorsque la viscosité μ et la conductibilité λ sont sensiblement proportionnelles à la racine carrée de la température, ce qui constitue une bonne approximation de la loi de Sutherland à

haute température :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} ,$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} .$$

On peut alors définir des longueurs de relaxation caractéristiques de l'écoulement en utilisant la célérité du son dans le gaz :

$$\lambda_u = a\,\tau_u = a_0\,\tau_{u_0} ,$$

$$\lambda_T = a\,\tau_T = a_0\,\tau_{T_0} .$$

Les équations réduites ont une forme très comparable dans ce cas à celle qu'elles ont lorsque λ et μ sont constants. Les seuls changements consistent en la substitution de :

$$\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} m\right)^{\frac{1}{2}} \text{ à } \left(1+K n^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1} m (1+K\beta_p)\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

et de :

$$\tau_{u_0}\sqrt{2H(1+K)} \quad \text{à} \quad \tau_u \sqrt{2H(1+K)} .$$

Il faut enfin noter que l'écoulement autour des particules peut s'éloigner notablement du régime de Stokes. Les coefficients correctifs $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_T$ à apporter au coefficient de traînée et au nombre de Nusselt font intervenir les nombres de Reynolds et de Mach relatifs :

$$Re_R = \frac{\dot{m} d_p}{\mu_0 A_c} \times \frac{\mu}{\mu_0} \times \frac{1-n}{\frac{A}{A_c}} ,$$

$$M_R = \frac{1-n}{\sqrt{\gamma m}} .$$

Il apparaît un nouveau paramètre de similitude pour ce type d'écoulement. Il correspond au coefficient de Re_R :

$$\frac{\dot{m} d_p}{\mu_0 A_c} \simeq \frac{P_0 d_p}{C^* \mu_0} ,$$

où C^* peut être calculé en première approximation pour l'équilibre.

Les équations sont peu modifiées par l'introduction de $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_T$. Les effets de ces corrections peuvent être assez sensibles du fait qu'en régime de Stokes le coefficient de traînée est sous-estimé et, donc, que les particules traînent en réalité moins qu'il n'est prévu par cette hypothèse. Ces effets dépendent évidemment de la taille de la tuyère.

b) Comportement de la phase condensée :

L'hypothèse de particules de diamètre uniforme et constant est irréaliste puisque l'on a montré que les particules sont largement distribuées suivant leur diamètre et qu'elles s'agglomèrent au cours de la détente. Il faut vérifier d'autre part que la fraction volumique des particules est bien négligeable et modifier les équations pour tenir compte de la solidification.

Les équations peuvent être établies sans trop de difficultés en tenant

compte du volume occupé par la phase condensée. Lors de l'établissement des équations générales, il a été montré qu'il faut définir une masse volumique fictive de la phase gazeuse et modifier l'équation d'état en conséquence. L'écoulement en équilibre biphasique n'est plus équivalent à celui d'un gaz ; le point sonique pour le mélange est situé en amont du col géométrique. L'écoulement biphasique relaxé est encore décrit par trois relations en m, n, p. Un nouveau paramètre de similitude apparaît :

$$\eta = \frac{\dot{m}}{K \rho_c A_c \sqrt{2H(1+K)}} \simeq \frac{p_0}{K C^* \rho_c \sqrt{2H(1+K)}} .$$

Le point singulier correspond à :

$$m = \frac{1}{\gamma} - \eta \frac{\left(1+Kn^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1} m (1+K\beta p)\right)^{\frac{1}{2}}}{n \frac{A}{A_c}}$$

Rudinger [55] a effectué l'intégration des équations pour différents taux de charge de la suspension. Ces calculs montrent que le volume des particules ne devient sensible que lorsque ε dépasse 0,01. Pour tous les propergols métallisés et toutes les conditions d'utilisation, ε est toujours très inférieur à cette valeur. Le volume de la phase condensée est donc bien négligeable.

Lors de la solidification de l'alumine, dans le divergent de la tuyère, l'équation donnant la température de la phase condensée ne peut plus être utilisée. La température de la phase condensée reste en effet constante pendant la solidification et il faut introduire une nouvelle variable f correspondant à la fraction volumique de la phase condensée qui est solidifiée. Le bilan thermique d'une particule donne l'équation pour f :

$$u_p \frac{df}{dx} = - \frac{c_L \theta_T}{\tau_T L_f} (T - T_{pf}) \quad , \quad (0 \leq f \leq 1) ;$$

L'équation globale de l'énergie doit être également modifiée :

$$C_p T + \frac{u^2}{2} + K\left(C_L T_{pf} + \frac{u_p^2}{2}\right) = H(1+K) + K f L_f .$$

Après la solidification, on utilise à nouveau les équations de départ avec toutefois une nouvelle valeur de l'enthalpie génératrice. On trouvera dans la publication [33] les équations en m, n, p à utiliser pendant et après la solidification. Pour connaître l'influence de ce phénomène sur les écarts entre phases, on a eu recours à une méthode de perturbation. L'écoulement non perturbé permet de connaître la fonction $f^{(0)}(x)$ qui ne dépend que du rapport de section ; u varie beaucoup moins vite qu'en l'absence de solidification, ce qui est favorable au point de vue de l'écart cinétique entre phases. Au premier ordre, il apparaît que l'écart thermique a tendance à augmenter. L'influence de la solidification sur l'impulsion spécifique doit donc être déterminée par le calcul.

Il faut enfin prendre en considération la répartition et l'évolution des particules. Cette évolution n'est pas indépendante de l'écoulement des produits de combustion, les collisions étant principalement dues aux différences de vitesse moyenne entre particules de tailles différentes. Les calculs les plus complets consistent donc à répartir les particules en un nombre limité de classes, à établir une série d'équations pour chacune de ces classes et à tenir compte explicitement des collisions et des agglomérations [29]. La précision de ces calculs est limitée

par les incertitudes portant sur les rendements de collisions [30]. Lorsque la théorie du proche équilibre est applicable, on découple en première approximation le problème de l'écoulement et celui de l'agglomération des particules ; les vitesses de particules peuvent en effet être calculées à partir des caractéristiques de l'écoulement en équilibre et l'évolution des différents rayons moyens calculée dans la détente, ainsi qu'il a été montré au chapitre 3.3.4. Dans ces conditions, la répartition locale des particules est une donnée à introduire dans le calcul de l'écoulement et il est intéressant de pouvoir caractériser la phase condensée par un seul diamètre moyen. Les tentatives dans cette voie sont limitées [48] et l'on trouve dans la littérature une grande variété de diamètres "efficaces" : ce sont d_{32} , d_{43} , d_{53} ..... Il est cependant possible de montrer qu'une seule définition est homogène avec les hypothèses de départ.

Reprenons en effet les expressions de u_p et α_p :

$$u_p = \frac{1}{\rho_p} \iiint m(r) c f \, d^3\xi \, dr \, dt,$$

$$\alpha_p = \frac{1}{\rho_p} \iiint m(r) e f \, d^3\xi \, dr \, dt.$$

Si nous supposons :

$$c \simeq u^{(e)} \left(1 - \tau_u \frac{du^{(e)}}{dx}\right),$$

$$e \simeq e^{(e)} \left(1 - \tau_T \frac{u^{(e)}}{T^{(e)}} \frac{dT^{(e)}}{dx}\right),$$

il vient immédiatement :

$$u_p = u^{(e)} \left(1 - \overline{\tau_u} \frac{du^{(e)}}{dx}\right),$$

$$T_p = T^{(e)} \left(1 - \overline{\tau_T} \frac{u^{(e)}}{T^{(e)}} \frac{dT^{(e)}}{dx}\right),$$

où $\overline{\tau_u}$ et $\overline{\tau_T}$ sont basés sur le rayon moyen r_{53} défini par la relation :

$$r_{53}^2 = \frac{\iiint r^5 f \, d^3\xi \, dr \, dt}{\iiint r^3 f \, d^3\xi \, dr \, dt}.$$

Avec les mêmes hypothèses, les termes de couplage entre phases s'écrivent :

$$F_{p2} \simeq \rho_p u^{(e)} \frac{du^{(e)}}{dx},$$

$$Q \simeq C_c \rho_p u^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx}.$$

Il suffit donc en définitive de connaître l'évolution de r_{53} en fonction de $\frac{A}{A_c}$ ou de x pour conduire le calcul de manière classique. Il a été montré précédemment que les moments d'ordre élevé de la loi de distribution sont expérimentalement les plus mal connus et d'autre part qu'ils subissent une variation importante au cours de la détente. De ce fait, l'agglomération des particules apparaît comme un phénomène qu'il est impossible de négliger dans un schéma de calcul réaliste et

la connaissance incomplète de la phase condensée se traduira nécessairement par une incertitude assez grande dans la prévision des pertes d'impulsion spécifique.

c) Effets bidimensionnels :

L'hypothèse d'un écoulement par tranches doit être considérée comme une première approximation et on sait cette description insuffisante, même pour un fluide homogène (calcul des pressions de paroi dans la région du col, optimisation du profil ....). Cette insuffisance est encore plus marquée pour des écoulements de suspensions, du fait de la répartition non uniforme de la phase condensée dans la phase gazeuse. •

Cette répartition reste en général uniforme dans la chambre à cause de la dimension réduite des particules, des faibles vitesses de l'écoulement et des faibles variations géométriques de la cavité. Au contraire, l'écoulement de tuyère est caractérisé par une contraction puis une expansion du jet, des accélérations importantes et une croissance des particules. Des écarts entre les composantes, normales à l'axe de la tuyère, des vitesses des deux phases se produisent donc. Ils ont pour effet que la phase condensée a tendance à se concentrer sur l'axe de la tuyère. Cette ségrégation est amplifiée par le fait que les particules se concentrant, les fréquences de collisions et leurs dimensions moyennes augmentent en conséquence.

Il n'existe pas à notre connaissance de schémas de calculs bidimensionnels qui tiennent compte de la croissance des particules ; l'introduction d'une répartition des particules suivant leur diamètre est très rare [43]. Le diamètre des particules est presque toujours supposé constant et uniforme et les collisions sont par conséquent négligées.

Toutes les zones de la tuyère ne sont pas traitées d'une manière identique. L'écoulement du convergent est traité comme un écoulement puits, avec une répartition spatiale uniforme de la phase condensée, ou en analyse unidimensionnelle. L'analyse de la zone transsonique nécessite en raison de sa complexité le recours à un certain nombre de simplifications. On peut procéder au calcul des trajectoires dans le champ de vitesse déterminé à l'équilibre des phases ; c'est là une extension au problème bidimensionnel de la méthode de perturbation [32, 56, 57].

L'hypothèse des déphasages constants peut être également généralisée au problème bidimensionnel [43]. Ces calculs permettent de définir des conditions initiales pour démarrer un calcul de caractéristiques dans la portion supersonique de l'écoulement [58, 59, 60]. Les résultats de ce calcul peuvent être comparés à ceux de l'approximation unidimensionnelle corrigés de l'effet de divergence du jet : on constate que celle-ci sous-estime la perte liée à la phase condensée [56, 61]. L'influence de la répartition inhomogène de la phase condensée est donc néfaste.

Le comportement réel des produits de combustion d'un propergol solide métallisé est donc incomplètement décrit par le schéma simplifié du paragraphe 4.5.1. Un schéma réaliste doit prendre en considération le caractère multiréactif de la phase gazeuse (dans l'une des hypothèses figée ou en équilibre), la croissance des particules et la ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement. Des formules peuvent être établies pour le calcul de la perte d'impulsion spécifique due à la phase condensée dans les conditions les plus générales à condition que les particules soient ou très petites ou très grosses ; une estimation des effets bidimensionnels peut également être donnée.

4,6. FORMULES POUR LE CALCUL DE LA PERTE D'IMPULSION SPÉCIFIQUE

La perte d'impulsion spécifique dépend de toute l'histoire des particules et des échanges entre phases depuis l'entrée de la tuyère ce qui explique que l'écoulement doit être entièrement calculé avant que l'impulsion spécifique soit connue. Mis à part le cas des tuyères à gradient de vitesse constant, inutilisables en propulsion, il n'existe donc pas de formules absolument générales pour le calcul des pertes. Si l'on suppose toutefois que les particules sont très petites, leur vitesse et leur température sont très voisines de celles de la phase gazeuse (proche équilibre) et on peut chercher une formule valable dans ces conditions. De même si les particules sont très grosses, elles ne participent pratiquement pas à la détente (proche figeage) et une formule peut également être recherchée. L'intérêt de ces formules approchées est de permettre une estimation rapide de la perte d'impulsion spécifique pour les très petits ou les très gros propulseurs et une discussion relativement aisée de l'influence des différents paramètres de fonctionnement.

4,6.1. Perte d'impulsion spécifique en proche équilibre

Le calcul en proche équilibre est relativement classique [5, 7] encore qu'il faille l'étendre à une phase condensée dont les particules croissent et à un mélange gazeux multiréactif. C'est ce qui a été fait dans la publication de la référence [62]. La démonstration fait appel à l'entropie moyenne du mélange comme caractéristique des échanges irréversibles entre phases. On se propose ici d'établir la même formule par une voie légèrement différente.

Rappelons les équations du problème général pour une phase gazeuse chimique figée :

$$\begin{cases} \rho u A = \dot{m}_g , \\ \rho_p u_p A = \dot{m}_p , \\ \rho u \left(\dfrac{du}{dx} + K \dfrac{du_p}{dx} \right) + \dfrac{dp}{dx} = 0 , \\ h(T) + \dfrac{u^2}{2} + K \left[c_p(T_p) + \dfrac{u_p^2}{2} \right] = (1+K) H , \\ p = \rho r T , \\ + \text{ équations de la phase condensée.} \end{cases}$$

Définissons de nouvelles fonctions :

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1+K) , \\ u' = u , \quad u_s = u - u_p , \\ T' = T , \quad T_s = T - T_p , \\ h'(T') = \dfrac{h(T) + K e_p(T)}{1+K} , \\ p' = p , \\ r' = \dfrac{r}{1+K} . \end{cases}$$

Il ne s'agit là que d'un changement de fonctions : les grandeurs affectées du ' sont distinctes des grandeurs moyennes du mélange. En groupant les termes dépendant de u_s et T_s dans le second membre, on obtient :

$$\begin{cases} \rho' u' A = \dot{m} , \\ h'(T') + \dfrac{u'^2}{2} = H + \dfrac{K}{1+K}\left(C_s T_s + u u_s - \dfrac{u_s^2}{2}\right) , \\ \rho' u' \dfrac{du'}{dx} + \dfrac{dp'}{dx} = \dfrac{K}{1+K} \rho' u' \dfrac{du_s}{dx} , \\ p' = \rho' r' T' , \\ + \text{ équations de la phase condensée.} \end{cases}$$

Pour des particules infiniment petites les écarts de vitesse et de température entre phases u_s et T_s sont identiquement nuls et les grandeurs ' sont relatives au mélange à l'équilibre biphasique. Les particules étant de taille finie, les écarts de vitesse et de température entre phases qui prennent naissance perturbent l'écoulement du mélange, ainsi que le montrent les équations. On peut définir une variation d'entropie par :

$$dh' = T' ds' + \frac{dp'}{\rho'} .$$

Il vient :

$$ds' = \frac{K}{1+K} \times \frac{C_s dT_s + u_s du' - u_s du_s}{T'} .$$

L'équation de quantité de mouvement peut alors être remplacée par :

$$s'(T') - s'(T_0) = \frac{K}{1+K} \int_0^x \frac{C_s dT_s + u_s du' - u_s du_s}{T'} .$$

Le calcul se fait donc de la façon suivante :

- une première approximation de u_s et T_s, notées $u_s^{(0)}$ et $T_s^{(0)}$, est donnée par l'étude des équations de la phase condensée. Le résultat est classique :

$$u_s^{(0)} = \overline{\tau_u}\, \bar{u}^{(0)} \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dx} , \qquad T_s^{(0)} = \overline{\tau_T}\, u^{(0)} \frac{dT^{(0)}}{dx} .$$

Les variables surlignées correspondent au mélange biphasique et l'indice (o) indique qu'il s'agit de la première approximation ; $\overline{u}^{(o)}$ et $\overline{T}^{(o)}$ sont bien évidemment la vitesse et la température de l'écoulement de référence (équilibre biphasique). $\overline{\tau_u}$ et $\overline{\tau_T}$ sont calculés avec le diamètre moyen local r_{53}.

- on reporte $u_s^{(o)}$ et $T_s^{(o)}$ dans les équations précédentes, en négligeant les termes du second ordre, et on calcule les grandeurs $'$. Une méthode linéarisée est encore utilisée. On définit les écarts:

$$\delta\rho' = \rho' - \overline{\rho}^{(o)},$$

$$\delta u' = u' - \overline{u}^{(o)} \ldots$$

Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\rho'}{\overline{\rho}^{(o)}} + \dfrac{\delta u'}{\overline{u}^{(o)}} = \dfrac{\delta\dot{m}}{\overline{\dot{m}}^{(o)}}, \\ \overline{C_{pf}}^{(o)}\,\delta T' + \overline{u}^{(o)}\delta u' = \dfrac{K}{1+K}\left(C_s T_s^{(o)} + \overline{u}^{(o)} u_s^{(o)}\right) = (\delta h')_a, \\ \overline{C_{pf}}^{(o)}\,\dfrac{\delta T'}{\overline{T}^{(o)}} - r'\dfrac{\delta p'}{\overline{p}^{(o)}} = \dfrac{K}{1+K}\displaystyle\int_0^x \frac{C_s dT_s^{(o)} + u_s d\overline{u}^{(o)}}{\overline{T}^{(o)}} = (\delta s')_a, \\ \dfrac{\delta p'}{\overline{p}^{(o)}} = \dfrac{\delta\rho'}{\overline{\rho}^{(o)}} + \dfrac{\delta T'}{\overline{T}^{(o)}} \cdot \end{cases}$$

La résolution du système par le calcul matriciel conduit aux expressions de $\delta\rho'$, $\delta u'$, ... En particulier :

$$\begin{cases} \delta u' = -\overline{u}^{(o)} \dfrac{\dfrac{\delta\dot{m}}{\overline{\dot{m}}^{(o)}} + \dfrac{(\delta s')_a}{r'} - \dfrac{(\delta h')_a}{\overline{a_f}^{(o)2}}}{\dfrac{\overline{u}^{(o)2}}{\overline{a_f}^{(o)2}} - 1}, \\ \delta p' = \overline{\rho}^{(o)} \dfrac{\overline{u}^{(o)2}\dfrac{\delta\dot{m}}{\overline{\dot{m}}^{(o)}} + \dfrac{\overline{C_{pf}}^{(o)}\overline{T}^{(o)} + \overline{u}^{(o)2}}{\overline{a_f}^{(o)}}(\delta s')_a - (\delta h')_a}{\dfrac{\overline{u}^{(o)2}}{\overline{a_f}^{(o)2}} - 1}. \end{cases}$$

L'annulation du dénominateur se produit au col géométrique pour $\overline{u}^{(o)} = \overline{a_f}^{(o)}$. La condition commune d'annulation des numérateurs des seconds membres s'écrit :

$$\frac{\delta\dot{m}}{\overline{\dot{m}}^{(o)}} = -\frac{(\delta s')_a^*}{r'} + \frac{(\delta h)_a^*}{\overline{a_f}^{(o)2*}}$$

La variation de la vitesse caractéristique est directement reliée aux variations du débit massique. On trouve, en supposant que C_s varie peu :

$$\frac{\delta C^*}{C^{*(o)}} = -\frac{\delta\dot{m}}{\overline{\dot{m}}^{(o)}} \simeq \frac{\mathcal{E}}{r'}\int_0^{x^*} \overline{\tau_u}\,\frac{\overline{u}^{(o)}}{\overline{T}^{(o)}}\left(\frac{d\overline{u}^{(o)}}{dx}\right)^2\left[1 + \frac{3}{2}\overline{\sigma_f}^{(o)}\beta^2\frac{\overline{u}^{(o)2}}{\overline{C_{pp}}^{(o)}\overline{T}^{(o)}}\right]dx$$

$$-\mathcal{E}\left[\left(\overline{\tau_u} + \beta(\overline{\sigma_f}^{(o)} - 1)\,\overline{\tau_T}\right)\frac{d\overline{u}^{(o)}}{dx}\right]^*.$$

Les deux termes sont de signes opposés, on ne peut donc conclure quant au signe de la variation de la vitesse caractéristique.

L'impulsion spécifique est définie dans l'hypothèse d'un écoulement de référence adapté correspondant à :

$$\bar{I}_A^{(e)} = \frac{\bar{u}_A^{(e)}}{g_0} \quad , \quad (\bar{P}_A^{(e)} = P_A) .$$

L'impulsion spécifique réelle est liée d'une part à l'écart de vitesse dans la section de sortie et d'autre part à l'écart de pression traduisant l'inadaptation de la tuyère. Il vient :

$$\frac{\delta I}{\bar{I}^{(e)}} = \frac{\delta u'_A}{\bar{u}_A^{(e)}} + \frac{A_A \delta p'_A}{\dot{\bar{m}}^{(e)} \bar{u}_A^{(e)}} - \varepsilon \frac{u_{sA}^{(e)}}{\bar{u}_A^{(e)}} .$$

Le résultat cherché est obtenu en substituant à $\delta u'$, δp , $u_s^{(e)}$ leurs expressions en fonction de $u^{(e)}$ et $T^{(e)}$. De nombreux termes s'éliminent et on obtient finalement, en étendant les calculs au cas de la solidification, et en négligeant les variations de C_s :

$$\frac{|\delta I|}{\bar{I}^{(e)}} = \varepsilon \frac{\bar{T}_A^{(e)}}{\bar{u}_A^{(e)2}} \int_{x_0}^{x_A} \bar{\tau}_u \frac{\bar{u}^{(e)}}{\bar{T}^{(e)}} \left(\frac{d\bar{u}^{(e)}}{dx}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2} \bar{\sigma}_{rf}^{(e)} k^2 \frac{\bar{u}^{(e)2}}{\bar{C}_{pf}^{(e)} \bar{T}^{(e)}}\right] dx \quad ,$$

où $k = \beta$ sans solidification,

et $k = \frac{1}{\varepsilon}$ pendant la solidification.

a) domaine de validité de la formule.

La formule proposée généralise des résultats obtenus par le même procédé mais dans des hypothèses beaucoup moins réalistes [7]. Sa précision est toutefois limitée par les simplifications qui ont dû être faites. La vitesse locale de la phase condensée est obtenue en proche équilibre et l'on a démontré que cette hypothèse surestime les écarts entre phases (figure 21) et l'influence des plus grosses particules. Cet effet est accentué par l'augmentation du coefficient de traînée par rapport à sa valeur calculée en régime de Stokes, lorsque le nombre de Reynolds relatif dépasse 1. La linéarisation des équations autour des valeurs à l'équilibre introduit également une approximation, qui toutefois pourrait être évitée en déterminant directement les grandeurs et non plus leurs écarts par rapport à l'équilibre. Il faut enfin rappeler que le diamètre utile σ_{53} est assez mal connu en raison de l'analyse fragmentaire des grosses particules.

En toute rigueur, la formule proposée n'est à utiliser que si la condition suivante est vérifiée :

$$\bar{\tau}_u \frac{d\bar{u}^{(e)}}{dx} \ll 1 .$$

Elle intéresse donc exclusivement les propulseurs de grande taille. On peut chercher à l'étendre à des propulseurs de plus petite taille de manière empirique, compte tenu des résultats expérimentaux.

b) calcul pratique de la perte d'impulsion spécifique.

Dans le calcul, $\overline{\tau_u}$ est une grandeur variable avec x en raison de la croissance des particules dans la tuyère et peut être ramenée à sa valeur à l'entrée de la tuyère :

$$\frac{\overline{\tau_u}}{\overline{\tau_{u_0}}} = \left(\frac{d_{53}}{d_{53_0}}\right)^2 \times \left(\frac{\rho_c}{\rho_{c0}}\right) \times \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-1}.$$

La quantité caractérisant l'évolution de la granulométrie des particules est :

$$q(x) = \left(\frac{d_{53}}{d_{53_0}}\right)^2$$

La figure 16 donne un exemple de la fonction $q(x)$; les variations de $q(x)$ sont importantes dans le problème qui nous occupe et ne peuvent être négligées.

La formule se met sous la forme :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(e)}}\right| = \varepsilon \overline{\tau_{u_0}} \frac{\overline{T}_\Delta^{(e)}}{\overline{u}_\Delta^{(e)2}} \int_{x_0}^{x_\Delta} q(x) \frac{\rho_c}{\rho_{c0}}(T^{(e)}) \frac{\mu_0}{\mu}(T^{(e)}) \frac{\overline{u}^{(e)}}{\overline{T}^{(e)}} \left(\frac{d\overline{u}^{(e)}}{dx}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2}\overline{\sigma_f}^{(e)} k^2 \frac{\overline{u}^{(e)2}}{\overline{c_{pf}}^{(e)} \overline{T}^{(e)}}\right] dx$$

$$= \varepsilon \overline{\tau_{u_0}} \frac{\overline{T}_\Delta^{(e)}}{\overline{u}_\Delta^{(e)2}} \int_0^{z_\Delta} \frac{\rho_c}{\rho_{c0}}(T^{(e)}) \frac{\mu_0}{\mu}(T^{(e)}) \frac{\overline{u}^{(e)}}{\overline{T}^{(e)}} \left(\frac{d\overline{u}^{(e)}}{dz}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2}\overline{\sigma_f}^{(e)} k^2 \frac{\overline{u}^{(e)2}}{\overline{c_{pf}}^{(e)} \overline{T}^{(e)}}\right] dz,$$

où $z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{q(x)}$.

La croissance des particules se traduit par une distorsion de l'intervalle d'intégration. Cette distorsion intéresse surtout les zones les plus éloignées de l'entrée de la tuyère, là où les particules sont les plus grosses. Alors que dans la détente d'une suspension de particules solides, le col joue un rôle prépondérant, dans le cas de particules liquides, le divergent sera plutôt l'élément important.

Pour simplifier les calculs, il est intéressant de faire apparaître dans la formule des grandeurs adimensionnelles. Posons :

$X = \frac{x}{L}$, où L est une longueur caractéristique,

$\overline{M}^{(e)} = \frac{\overline{u}^{(e)}}{\overline{a}^{(e)}}$.

Il vient :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(e)}}\right| = \varepsilon \frac{\overline{\tau_{u_0}} \overline{a}_0^{(e)}}{L} \frac{\overline{\gamma}_0}{\overline{\gamma}_\Delta \overline{M}_\Delta^{(e)2}} \int_{X_0}^{X_\Delta} q \frac{\rho_c}{\rho_{c0}} \frac{\mu_0}{\mu} \left(\frac{\overline{T}^{(e)}}{\overline{T}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}_0}\right)^{\frac{3}{2}} \overline{M}^{(e)} \left(1 + \eta(\overline{\gamma}-1)\overline{M}^{(e)2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1 + \frac{\overline{M}^{(e)}}{2\overline{\gamma}} \frac{d\overline{\gamma}}{d\overline{M}^{(e)}}}{1 + \delta \frac{\overline{\gamma}-1}{2} \overline{M}^{(e)2}}\right)^2 \left(\frac{d\overline{M}^{(e)}}{dX}\right)^2 dX,$$

où $\eta = \frac{3}{2}\overline{\sigma_f}^{(e)} k^2$ et $\delta = 1$ pendant la détente isentropique ($k = \beta$), $\delta = 0$ pendant la solidification de la phase condensée.

L'influence des paramètres de fonctionnement du propulseur peut être résumée brièvement [62] :

- la perte est directement proportionnelle à la charge en métal du propergol, par l'intermédiaire de $\mathcal{E}$,

- l'influence de la géométrie sera étudiée par la suite lorsque l'on s'interrogera sur les possibilités de réduire les pertes d'impulsion spécifique. Le rapport de section d'entrée de la tuyère ne devrait pas avoir une action sensible encore que l'organisation de l'écoulement dans la zone d'entrée agisse sur la granulométrie des particules ,

- le rapport de section de sortie de la tuyère est lié au rapport de détente. Le calcul permet de tracer la courbe de la figure 22 qui donne, en fonction du rapport de détente, la perte relative d'impulsion spécifique ramenée à sa valeur dans les conditions de référence. On constate qu'elle croît avec le rapport de détente mais reste du même ordre de grandeur,

- l'échelle du propulseur se manifeste explicitement par L ; en première analyse, la perte serait inversement proportionnelle à l'échelle du propulseur. En réalité, l'augmentation de l'échelle du propulseur se traduit également par une augmentation du temps de séjour et un accroissement de la dimension moyenne des particules à l'entrée de la tuyère (il existerait également une croissance plus marquée des particules dans la tuyère [28] mais cet effet n'a pas été confirmé). Le domaine de validité de la formule est de plus limité ; cependant son application à l'estimation des pertes <u>globales</u> d'impulsion spécifique permet des corrélations étonnamment bonnes [62].

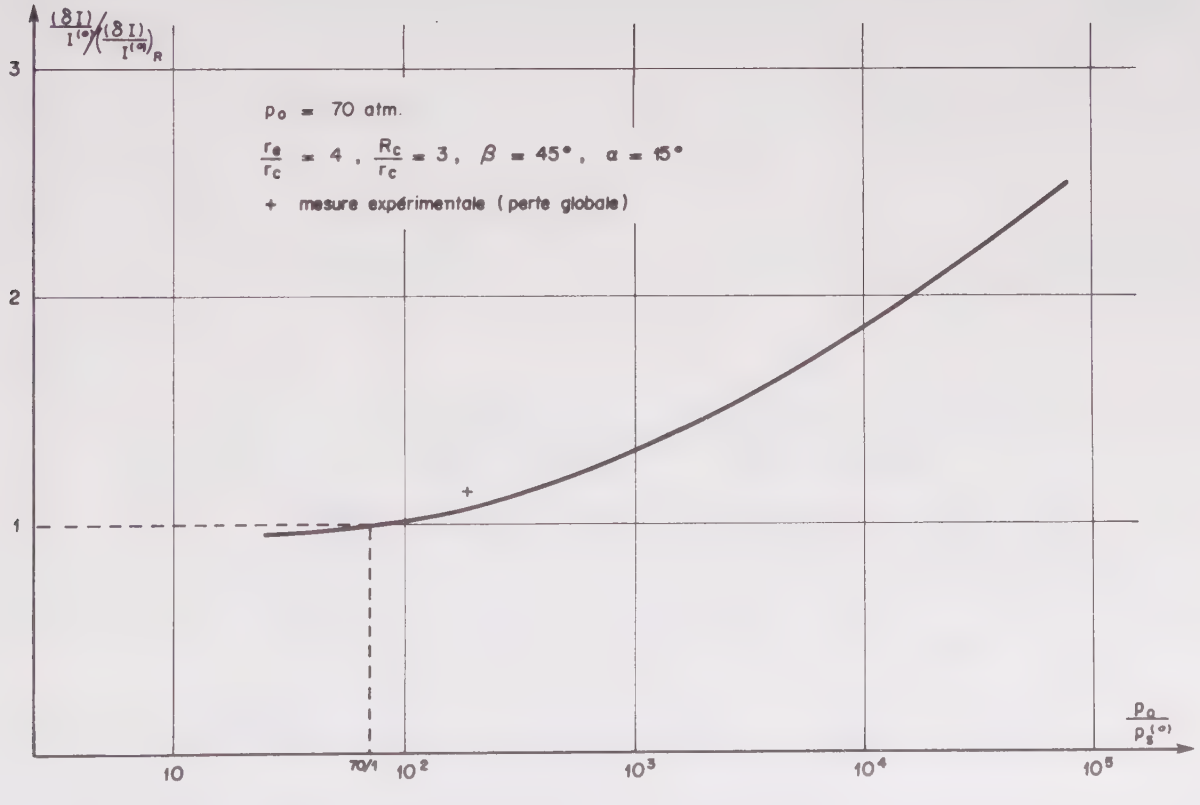


Fig. 22 - Influence du rapport de détente sur la perte d'impulsion spécifique due aux écarts entre phases.

4,6.2. Perte d'impulsion spécifique en proche figeage

Le calcul pour de grosses particules ou un petit propulseur est intéressant pour de nombreuses applications pratiques (microfusées) mais beaucoup moins classique qu'en proche équilibre puisqu'il n'existe pas de publication correspondante. Nous allons montrer qu'on peut cependant parvenir à une formule par un procédé très comparable à celui utilisé au paragraphe précédent.

On part du même système d'équations, à savoir :

$$\begin{cases} \rho u A = \dot{m}_g \,, \\ \rho_p u_p A = K \dot{m}_g \,, \\ \rho u \left(\frac{du}{dx} + K \frac{du_p}{dx} \right) + \frac{dp}{dx} = 0 \,, \\ h(T) + \frac{u^2}{2} + K \left[a_p(T_p) + \frac{u_p^2}{2} \right] = (1+K) H \,, \\ + \text{ équations de la phase condensée.} \end{cases}$$

Nous nous intéresserons au cas où les particules sont grosses c'est-à-dire peu accélérées par la phase gazeuse et peu refroidies dans la détente. On conserve les fonctions décrivant la phase gazeuse, mais on pose pour la phase condensée :

$$u_d = u_p \,,$$

$$T_d = T_o - T_p \,.$$

Les termes contenant les grandeurs u_d et T_p sont groupés dans les seconds membres des équations :

$$\begin{cases} \rho u A = \dot{m}_g \,, \\ \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = - K \rho u \frac{du_d}{dx} \,, \\ h(T) + \frac{u^2}{2} = h_o + K \left(C_s T_d - \frac{u_d^2}{2} \right) \,, \\ p = \rho r T \,, \\ + \text{ équations transformées de la phase condensée.} \end{cases}$$

Pour des particules très grosses (donc en nombre réduit), les grandeurs u_d et T_d sont pratiquement nulles. L'écoulement de référence est donc ici l'écoulement des produits de combustion gazeux <u>seuls</u>. Lorsque les particules sont telles que u_d et T_d prennent des valeurs sensibles, l'écoulement de la phase gazeuse est perturbé. Une variation d'entropie est définie par :

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \,.$$

Il vient :

$$ds = K \frac{c_s T_d + u du_d - u_d du_d}{T} .$$

L'équation de quantité de mouvement dans le dernier système d'équations peut être remplacée par :

$$s(T) - s(T_0) = K \int_0^x \frac{c_s T_d + u du_d - u_d du_d}{T} .$$

Une première approximation de u_d et T_d est donnée par l'étude des équations de la phase condensée ; $u_d^{(o)}$ et $T_d^{(o)}$ sont ensuite introduits dans les équations de la phase gazeuse et on calcule les perturbations de l'écoulement gazeux qui en résultent.

Sous sa forme générale l'équation de quantité de mouvement de la phase condensée s'écrit :

$$\rho_p u_p \frac{du_p}{dx} = \iiint \frac{\varepsilon_u}{\tau_u} (u-c) m(r) f d^3c_g de d\tau .$$

Le proche figeage s'exprime simplement dans le second membre en considérant :

$$c \ll u ,$$

$$u \simeq u^{(g)} .$$

Il vient donc :

$$\rho_p u_p \frac{du_p}{dx} \simeq u^{(g)} \iiint \frac{\varepsilon_u}{\tau_u} m(r) f d^3c_g de d\tau .$$

Le coefficient correctif a ici certainement une influence importante en raison des valeurs élevées qu'atteint le nombre de Reynolds. On définira donc une valeur moyenne de la constante de temps $\overline{\tau_u}$ par la formule :

$$\overline{\tau_u} = \frac{\rho_p}{\iiint \frac{\varepsilon_u}{\tau_u} m(r) f d^3c_g de d\tau} .$$

Une formule identique définit le diamètre quadratique moyen à utiliser. Notons seulement que si l'on suppose $\varepsilon_u = 1$, alors $\overline{\tau_u}$ doit être calculé avec le diamètre d_{31}.

L'équation permettant de calculer $u_d^{(e)}$ se réduit donc à :

$$u_d^{(e)} \frac{du_d^{(e)}}{dx} = \frac{u^{(e)}}{\overline{\tau_u}} .$$

L'intégration donne :

$$u_d^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\tau_{u_0}}}} \left[2 \int_0^x \frac{\overline{\tau_{u_0}}}{\overline{\tau_u}} u^{(e)} dx \right]^{\frac{1}{2}} .$$

De même, l'équation énergétique de la phase condensée est tout d'abord :

$$\rho_p u_p \frac{dT_p}{dx} = \iiint \frac{\mathcal{E}_T}{\tau_T} \frac{e(T_g) - e}{c_c} m(r) f d^3g \, de \, d\sigma .$$

Le proche figeage conduit à prendre :

$$e \simeq c_c T_0 ,$$

$$e(T_g) \simeq c_c T^{(e)} .$$

Une valeur moyenne de la constante de temps, $\overline{\tau_T}$ est donnée par :

$$\overline{\tau_T} = \frac{\rho_p}{\iiint \frac{\mathcal{E}_T}{\tau_T} m(r) f d^3g \, de \, d\sigma} ,$$

et $\overline{\tau_T}$ est calculée avec d_{31} si $\mathcal{E}_T \equiv 1$ $(Nu = 2)$.

L'équation donnant $T_d^{(e)}$ est finalement :

$$u_d^{(e)} \frac{dT_d^{(e)}}{dx} = \frac{T_0 - T^{(e)}}{\overline{\tau_T}} .$$

L'intégration conduit à :

$$T_d^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\tau_{u_0}}}} \frac{\overline{\tau_{u_0}}}{\overline{\tau_{T_0}}} \int_0^x \frac{\frac{\overline{\tau_{T_0}}}{\overline{\tau_T}} (T_0 - T^{(e)})}{\left[2 \int_0^x \frac{\overline{\tau_{u_0}}}{\overline{\tau_u}} u^{(e)} dx \right]^{\frac{1}{2}}} .$$

En reportant $u_d^{(e)}$ et $T_d^{(e)}$ dans les équations de la phase gazeuse, en se limitant aux termes du premier ordre et en linéarisant le système, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\rho}{\rho^{(e)}} + \dfrac{\delta u}{u^{(e)}} = \dfrac{\delta \dot{m}_g}{\dot{m}_g^{(e)}} , \\ c_{pf}^{(e)} \delta T + u^{(e)} \delta u = K C_s T_d^{(e)} = (\delta h)_a , \\ c_{pf}^{(e)} \dfrac{\delta T}{T^{(e)}} - r \dfrac{\delta p}{p^{(e)}} = K \displaystyle\int_0^x \frac{C_s T_d^{(e)} + u^{(e)} du^{(e)}}{T^{(e)}} = (\delta s)_a , \\ \dfrac{\delta p}{p^{(e)}} = \dfrac{\delta \rho}{\rho^{(e)}} + \dfrac{\delta T}{T^{(e)}} . \end{cases}$$

La résolution du système permet d'exprimer explicitement chaque écart δu , δp ... Le col géométrique est un point singulier qui permet de trouver la variation du débit gazeux $\dot{m}_g$; cependant aucune conclusion ne peut être dégagée quant au signe de $\delta \dot{m}_g$.

L'impulsion spécifique de référence correspond à un écoulement gazeux adapté et est calculéepour le débit total des produits de combustion:

$$I^{(e)} = \frac{u^{(e)}}{(1+K)\, g_0} .$$

L'écart d'impulsion spécifique se met sous la forme :

$$\frac{\delta I}{I^{(e)}} = \frac{\delta u}{u^{(e)}} + \frac{A_\Delta \delta p}{\dot{m}_g^{(e)} u_\Delta^{(e)}} + K \frac{u_d^{(e)}}{u^{(e)}} .$$

Le calcul conduit à :

$$\boxed{\frac{\delta I}{I^{(e)}} = \frac{K T_\Delta^{(e)}}{u_\Delta^{(e)2}} \int_0^{x_\Delta} \frac{u^{(e)}}{T^{(e)}} \left[\frac{C_s}{C_{pf}^{(e)}} \frac{T_d^{(e)}}{T^{(e)}} + \left(1 + \frac{u^{(e)2}}{C_{pf} T^{(e)}}\right) \frac{u_d^{(e)}}{u^{(e)}} \right] \frac{du^{(e)}}{dx} dx}$$

On constate que δI est positif, ce qui est naturel puisque dans l'écoulement de référence la phase condensée ne participe pas à la propulsion.

On peut s'interroger comme pour le proche équilibre sur le domaine de validité de la formule. La condition s'établit assez facilement :

$$\frac{\sqrt{\overline{\tau_{uo}}}\, u^{(e)}}{\left[2 \int_0^x \frac{\overline{\tau_{uo}}}{\overline{\tau_u}} u^{(e)} dx \right]^{\frac{1}{2}}} \gg 1 .$$

Il faut également noter que la formule ne reste valable que si la solidification de la phase condensée ne se produit pas dans la tuyère ($T_d^{(e)} < T_o - T_{pf}$).

La discussion relative à l'influence des paramètres de fonctionnement sur l'impulsion spécifique est rendue complexe du fait que $u_d^{(e)}$ et $T_d^{(e)}$ tiennent compte de toute l'histoire des particules. On note que l'accroissement d'impulsion spécifique reste proportionnel à la teneur en métal du propergol.

4,7. INFLUENCE D'UNE STRATIFICATION DE L'ÉCOULEMENT

Comme première approche du phénomène de ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement, nous avons proposé [63] de considérer l'écoulement comme parfaitement stratifié, la masse volumique de la phase condensée variant d'un tube de courant à l'autre. On suppose en outre que l'équilibre cinétique et thermique entre phases est constamment réalisé, ce qui permet de définir dans chaque tube de courant

un gaz équivalent, et que la phase gazeuse est constituée d'une gaz thermiquement parfait. La condition de raccordement qui permet de définir entièrement le problème est l'uniformité de la pression dans chaque section droite de la tuyère.

Seule la pression locale ne dépend que de l'abscisse prise le long de l'axe de la tuyère. On exprimera donc toutes les grandeurs en fonction de la pression réduite par les formules classiques :

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}} ,$$

$$\frac{\bar\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\bar\gamma}} , \qquad \text{avec } \bar\rho = \rho(1+K) ,$$

$$\left(\frac{U}{U_L}\right)^2 = 1-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}}, \text{ avec } U_L = \frac{2\bar\gamma}{\bar\gamma-1} r T_0 ,$$

$$\frac{dr_*^2}{(dr^2)_c} = \left(\frac{\bar\gamma-1}{2}\right)^{\frac12}\left(\frac{\bar\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\bar\gamma+1}{2(\bar\gamma-1)}} \frac{\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\bar\gamma+1}{2\bar\gamma}}}{\sqrt{\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}}-1}} .$$

L'exposant isentropique du mélange, $\bar\gamma$, dépend du tube de courant considéré par l'intermédiaire de K :

$$\bar\gamma = \frac{\gamma(1+K\beta)}{1+K\beta\gamma} .$$

Il s'ensuit que la section minimale des tubes de courant, $(dr^2)_c$, n'est pas atteinte par une valeur commune de la pression réduite et qu'il convient donc de ramener toutes les grandeurs à des valeurs dans une section de référence telle que la section d'entrée. En posant :

$$\frac{P_e}{P_0} = 1-\varepsilon , \quad \varepsilon \ll 1 ,$$

il vient, par exemple :

$$\frac{dr^2}{(dr^2)_e} = \sqrt{\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}}\,\varepsilon \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\bar\gamma-1}{2\bar\gamma}} \left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\bar\gamma-1}{\bar\gamma}}-1\right]^{-\frac12} .$$

En exprimant les débits élémentaires des deux phases dans chaque tube de courant puis en intégrant sur la section droite, on obtient la valeur moyenne du rapport des débits des deux phases $\bar K$:

$$\bar K = \frac{\int_0^1 \frac{K}{\sqrt{1+K}} R^{-\frac{1}{\bar\gamma}} d(r_e^{*2})}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+K}} R^{-\frac{1}{\bar\gamma}} d(r_e^{*2})} ,$$

où $\qquad r^* = \frac{r}{r_{paroi}} , \qquad R = \frac{P_0}{P} .$

Dans la section d'entrée, on a plus simplement :

$$\bar K_e = \frac{\int_0^1 \frac{K}{\sqrt{1+K}} d(r_e^{*2})}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+K}} d(r_e^{*2})} .$$

Pour les applications numériques, on a choisi une loi qui présente une allure comparable à celle des courbes de la figure 20 et caractérisant la concentration des particules dans le centre de l'écoulement :

$$K = K_m \left(1 - r_e^{*2}\right) .$$

On en déduit la relation entre K_m et $\overline{K_e}$:

$$K_m = \frac{3}{2}\left(1 + 2\overline{K_e} - \sqrt{1 + \frac{4}{3}\overline{K_e}}\right) .$$

Elle permet de calculer K_m à partir de la charge métallique du propergol.

Pour obtenir l'évolution de la pression le long de la tuyère, on procède également par intégration :

$$\frac{A}{A_e} = \sqrt{\mathcal{E}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] d\left(r_e^{*2}\right) .$$

Toutefois $\mathcal{E}$ n'est pas connu à priori. Pour le déterminer, il faut après avoir ramené A à sa valeur A_c au col géométrique, écrire que sa dérivée par rapport à la pression réduite au col géométrique est nulle. Une méthode approchée permet le calcul du rapport critique $\left(\frac{P}{P_0}\right)^*$ dans le cas de l'écoulement stratifié ; l'application numérique montre que ce rapport est très voisin de sa valeur pour l'écoulement homogène. La pression apparaît insensible à l'intensité de la stratification.

La répartition de la vitesse, de la température ou du débit dans le jet peut être trouvée dans chaque section. On établit tout d'abord la relation donnant la position d'une tube de courant caractérisé par le paramètre K , le rapport de pression intervenant comme paramètre :

$$r^{*2} = \frac{\displaystyle\int_{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{1+K\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{R^t(R^t-1)}}}{\displaystyle\int_{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{1+K_m\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{R^t(R^t-1)}}} \quad , \text{(pour la loi } K(r_e^*) \text{ retenue)},$$

Si l'on compose r^* à se valeur correspondante r_e^* dans la section d'entrée, on constate que :

$$r^* > r_e^* \quad , \forall K .$$

Cette inégalité signifie que l'expansion du mélange est d'autant plus grande que la proportion de phase condensée y est plus importante.

Chaque grandeur est ramenée à sa valeur sur l'axe et est tracée en fonction de la distance à l'axe pour trois sections : la section d'entrée, la section du col et la section de sortie définie par un rapport de détente 70/1. La vitesse à la paroi est plus grande que celle sur l'axe ; cette différence tend à diminuer dans la détente. Cette constatation est en accord avec des calculs plus précis [64]. La température sur la paroi est au contraire plus forte que celle sur l'axe et cet effet tend à augmenter dans la détente. Le débit massique à la périphérie de l'écoulement est supérieur à celui du centre mais l'écart tend à s'annuler. La frontière sonique pour un écoulement stratifié (M= 1 dans le gaz) à une allure comparable à celle d'un écoulement homogène bidimensionnel.

L'influence de la stratification de l'écoulement sur les paramètres de performance apparaît comme une application des calculs précédents. On montre tout d'abord que la vitesse caractéristique est insensible à la stratification. Pour l'impulsion spécifique d'une tuyère adaptée, on établit dans les deux hypothèses d'un écoulement stratifié ou non stratifié les expressions :

$$I = \sqrt{2rT_0}\ \frac{\int_0^1 \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\left(1-R^{-\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}\right)}\, d\left(r^{*2}\right)}{\int_0^1 \sqrt{1+K}\ d\left(r^{*2}\right)}\ ,$$

et

$$I_0 = \sqrt{2rT_0}\ \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\ \frac{1-R^{-\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}}{1+K}}\ ,\ \text{où}\ \bar{\gamma}(\bar{K}).$$

La perte pour une détente infinie apparaît dépendre de β : elle est nulle si $\beta = 1$ et positive si $\beta \neq 1$. La figure 23 donne l'évolution de la perte d'impulsion spécifique due à la stratification en fonction du rapport de détente. La perte relative pour des rapports de détente réalistes est de l'ordre de quelques millièmes c'est-à-dire à la limite des valeurs dignes d'être prises en considération.

La perte par divergence du jet a également été calculée par intégration en affectant à la quantité de mouvement de chaque tube de courant un coefficient de correction calculé localement. Il semble que la formule classique globale pour les écoulements homogènes en $\frac{1+\cos\alpha}{2}$ soit encore applicable à un écoulement stratifié tant que l'angle du divergent ne dépasse pas 20°.

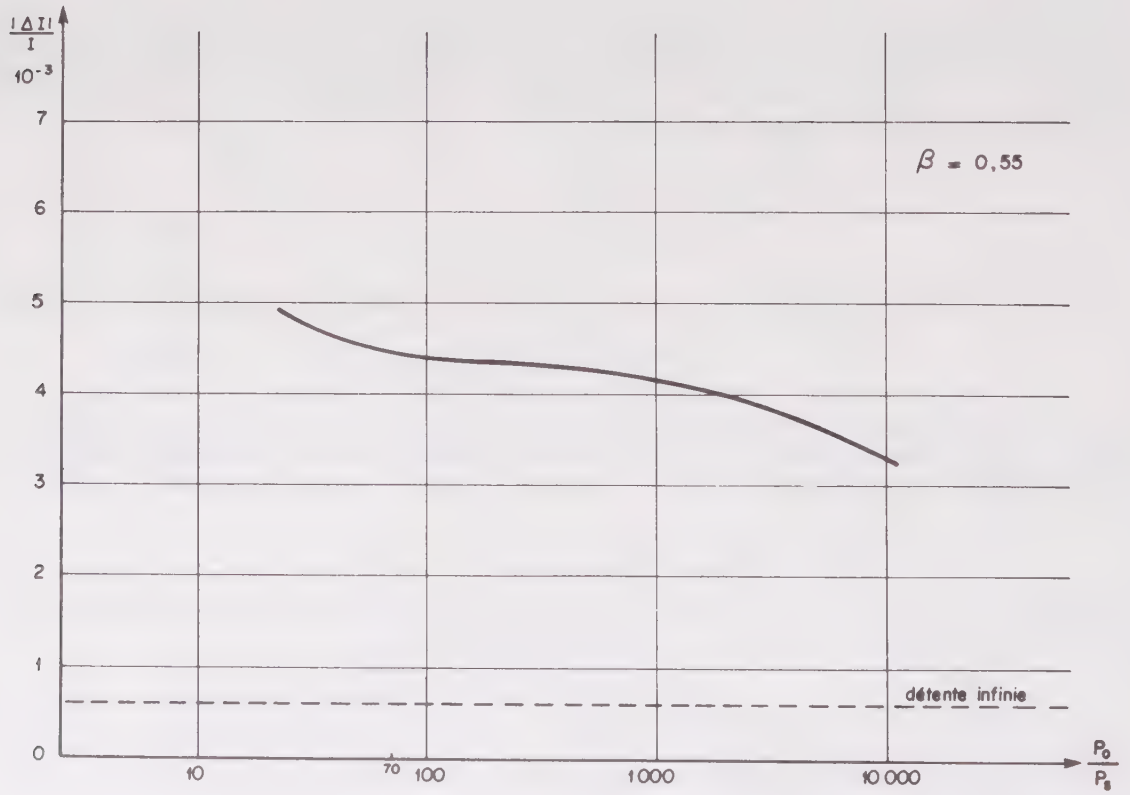


Fig. 23 - Perte d'impulsion spécifique due à la stratification du jet en fonction du rapport de détente.

Ces calculs approchés et assez élémentaires prouvent donc que la ségrégation de la phase condensée dans l'écoulement est un phénomène défavorable. Ils permettent bien de vérifier que le calcul unidimensionnel classique a tendance à sous-estimer la perte d'impulsion spécifique, comme le montrent les calculs bidimensionnels. Bien que l'ordre de grandeur de la perte d'impulsion spécifique due à la répartition imparfaite de la phase condensée obtenu par ce schéma simplifié soit correct, ce dernier ne peut être considéré que comme une première approche, les déphasages entre phases ayant un rôle actif dans le phénomène.

5. ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES DE PAROI

Les phénomènes de paroi sont responsables de la perte d'impulsion spécifique la plus importante lorsque le propergol n'est pas métallisé. L'action de ces échanges sur l'écoulement se traduit par la remise en cause de deux hypothèses : l'écoulement n'est en réalité ni adiabatique à cause du transfert thermique, ni isentropique à cause du frottement de paroi et de la perte thermique. Dans le cas d'un propergol métallisé, il faut ajouter un échange de masse entre l'écoulement et la paroi dû au dépôt de la phase condensée.

Même dans le cas d'un propergol non métallisé, l'estimation du flux thermique et du frottement de paroi est malaisée si bien que des écarts atteignant 50 % peuvent être relevés entre résultats expérimentaux et théoriques. Les difficultés proviennent du caractère instationnaire des phénomènes thermiques et de la configuration complexe de la couche limite qui se développe sur la paroi de la tuyère. Tout d'abord l'écoulement "extérieur" est accéléré, avec un gradient de pression négatif et la section de la tuyère varie rapidement. En raison du niveau de température des phénomènes, il y a lieu de tenir compte des réactions chimiques dans la couche limite ; même en négligeant les variations de concentration, les écarts de température élevés entre l'écoulement extérieur et la paroi rendent difficile l'estimation de propriétés moyennes du fluide. Il y aurait également lieu de tenir compte de l'échange par rayonnement. La nature de la couche limite est en elle-même assez mal connue ; expérimentalement, les observations lui donnent un caractère turbulent. On sait cependant qu'une stabilisation de l'écoulement a ten-

dance à se produire au col c'est-à-dire dans la zone où les coefficients d'échange sont les plus élevés [65]. Il arrive en outre que l'épaisseur de la couche limite soit suffisamment importante pour avoir une action sensible sur l'écoulement extérieur.

Les propergols métallisés se traduisent principalement par la formation d'une couche condensée sur la paroi dont l'action est importante sur le transfert thermique. Il faut aussi signaler que les particules perturbent la sous-couche laminaire ; dans le cas très schématique d'une couche laminaire de la plaque plane pour une suspension dans un fluide incompressible, on met en évidence [5] que les coefficients de frottement et de transfert thermique calculés pour le fluide seul doivent être multipliés, pour tenir compte de la phase condensée, par le facteur correctif :

$$\sqrt{1+K}\left[1+0{,}43\,\frac{a_0\tau_u}{x}\,\frac{K}{1+K}\right] \quad , \text{si } \frac{x}{a_0\tau_u} \gg 1.$$

Pour des hypothèses plus générales, il faudrait développer la théorie des couches limites biphasiques qui sont encore mal connues.

L'existence d'une couche condensée qui vient compliquer des calculs déjà difficiles et les conditions expérimentales très sévères (température principalement) expliquent que la bibliographie relative aux phénomènes de paroi lorsque le propergol est métallisé, soit aussi peu abondante. Il s'agit donc d'apporter une contribution dans un domaine quasi inexploré.

L'approche retenue consiste, en vue de simplifier les calculs, à essayer de découpler les phénomènes. L'accent sera mis sur les phénomènes nouveaux et on utilisera simultanément la théorie et l'expérience. La tuyère étudiée ici n'est pas représentative des gros propulseurs mais en choisissant tant pour le calcul que pour les essais, une tuyère entièrement usinée dans un bloc graphite, on s'affranchit de phénomènes tels que l'ablation des protections thermiques qui viendraient encore compliquer le problème.

5,1. ÉTUDE DE LA COUCHE LIMITE

Le problème de la couche limite pour un propergol métallisé se pose de la même façon que pour un propergol non métallisé aux seules différences près que la température de surface peut être celle de la couche condensée et que l'interface gaz-couche condensée est animée d'une vitesse que l'on pourra en général négliger. Il faut également dans le calcul du flux thermique et du coefficient de frottement tenir compte de la quantité de mouvement et de l'énergie apportée par les particules. L'échange par rayonnement qui pourrait être assez sensible dans le convergent, si l'on extrapole les résultats de la référence [65], est estimé.

Le problème thermique étant par nature instationnaire, la densité de flux thermique en un point évolue avec le temps. Aussi cherche-t-on à faire apparaître une grandeur caractéristique de l'échange thermique qui serait dans les hypothèses les plus simples une quantité constante. C'est le coefficient de transfert de chaleur h défini par :

$$q_p = h\,(h_f - h_p),$$

où q est la densité de flux thermique,

h_p est l'enthalpie à la paroi,

h_f est l'enthalpie de frottement (paroi athermane).

Au coefficient h sont liés deux nombres adimensionnels importants :

- le coefficient de flux de chaleur ou de transport d'enthalpie :

$$C_h = \frac{q_p}{\rho_e u_e (h_f - h_p)} = \frac{h}{\rho_e u_e} \quad \text{(nombre de Margoulis ou de Stanton)},$$

- le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{h C_p L}{\lambda} \quad , \quad \text{où } L \text{ est une longueur de référence.}$$

Pour le frottement à la paroi, on utilise le coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{\rho_e u_e^2}{2}} \quad .$$

Le problème posé est de calculer localement C_h ou Nu et C_f. Ces calculs peuvent être effectués soit en partant des équations générales de la couche limite, soit en utilisant des formules de caractère plus ou moins empirique.

Les formules sont dues aux travaux de Bartz [67] et se présentent sous la forme commune :

$$Nu = C\, Re^{0,8}\, \sigma_r^{0,4},$$

où la constante C vaut 0,023 ou 0,026.
Nu et Re sont basés sur le diamètre local D de la tuyère et d'après Colucci [3] le nombre de Prandtl σ_r est voisin de 1 dans nos conditions expérimentales.
La température de référence à laquelle il faut calculer les propriétés du gaz est la température statique :

$$Nu_e \simeq 0,023\, Re^{0,8}.$$

L'inconvénient majeur de cette formule est d'être totalement indépendante des conditions à l'entrée de la tuyère et en particulier de l'épaisseur de la couche limite. La formule a donc été étendue en fonction de considérations justifiées théoriquement pour donner :

$$Nu = 0,0346\, Re^{0,8}\, \sigma_r^{7/15} \left(\frac{2\ell}{D_0}\right)^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{D_0}{D}\right)^{-\frac{1}{20}} \left(\frac{T}{T_e}\right)^{-0,6},$$

à condition que $\frac{2\ell}{D_0}$ soit suffisamment grand.
La température de référence T^* est en première approximation la moyenne arithmétique de la température statique locale et de la température de paroi tandis que les propriétés du gaz sont calculées à la pression et à la composition de l'écoulement extérieur mais à la température T^*.

Cette formule a été développée pour les propulseurs à propergol liquide et fournit une représentation généralement satisfaisante du phénomène car la tuyère est précédée d'une chambre de combustion assez longue. Il en va autrement pour les propulseurs à propergol solide, l'origine de la couche limite se situant très près

de la tuyère, et seules les formules élémentaires peuvent être à la rigueur utilisées.

Les équations générales permettent en principe d'aboutir à des résultats plus généraux et plus complets (étude simultanée du transfert thermique et du frottement de paroi). Bien que nécessitant des calculs numériques plus complexes, cette méthode a été retenue pour les applications et nous rappelons les principales étapes de la théorie [67, 68, 69].

La couche limite est supposée entièrement turbulente y compris dans la région du col ce qui conduira probablement à surestimer le coefficient de transfert thermique dans cette zone et on admet pour simplifier que son épaisseur reste toujours très inférieure au rayon local de la tuyère. L'équation de base est l'équation intégrale de Von Karman pour la quantité de mouvement :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(\frac{H+2}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right).$$

δ_2 est ici l'épaisseur de quantité de mouvement et H un paramètre de forme, quotient de l'épaisseur de déplacement à l'épaisseur de quantité de mouvement. Les grandeurs de l'écoulement extérieur sont affectées de l'indice e et R est le rayon local de la tuyère ; x est l'abscisse prise le long de la couche limite.

On considère cette équation comme une équation différentielle pour δ_2, que l'on pourra intégrer à condition de connaître le profil des vitesses, la loi donnant le coefficient de frottement et l'origine de la couche limite.

- C_f est supposé donné par la relation [68] :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{b\,g}{R\,\delta_2^{m_0}},$$

où b est un coefficient numérique,

m_0 est un exposant dépendant du profil de vitesse utilisé,

g est un coefficient correctif tenant compte des effets de gaz réel.

Avec Michel, on prendra :

$$b = 0{,}0086,$$

$$m_0 = \frac{1}{5},$$

$$g = \frac{\left(\frac{\mu^*}{\mu_e}\right)^{\frac{1}{5}}}{\frac{T^*}{T_e}},$$

l'astérisque se rapporte ici à une température de référence ; la relation de Monaghan sera utilisée :

$$h^* - h_e = 0{,}54\,(h_p - h_e) + 0{,}16\,(h_f - h_e).$$

- la température de frottement est calculée à partir du facteur thermique pariétal :

$$r = \frac{T_f - T_e}{T_{te} - T_e}.$$

L'expression classique $r = \sigma_r^{\frac{1}{3}}$ conduit pour σ_r voisin de 1 à $T_f = T_{ie}$, température d'arrêt locale de l'écoulement extérieur.

- comme le gradient de pression est négatif, on peut penser que le profil de vitesse varie suffisamment lentement pour H soit déterminé par les expressions établies pour une plaque plane ; par ailleurs, le rôle joué par H étant peu important, on néglige les effets de gaz réel :

$$H \simeq H_{inc.} + \alpha M_e^2 + \beta \frac{T_p - T_f}{T_e},$$

avec $H_{inc.} = 1{,}4$, $\beta = 1{,}222$, $\alpha = 0{,}222$.

En posant :

$$Y = \delta_2^{m_o+1},$$

l'équation intégrale prend la forme :

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y = Q(x).$$

Cette équation peut être intégrée analytiquement. L'origine de la couche a été prise à l'entrée de la tuyère, cette condition étant retenue en raison de la configuration géométrique des propulseurs essayés, pour lesquels la face terminale du bloc est dans leplan d'entrée de la tuyère. On a supposé la viscosité proportionnelle à $\sqrt{T}$.

Il vient finalement :

$$\left(\frac{\delta_2}{R_c}\right)^{1,2} F_1 E \left(\frac{R}{R_c}\right)^{1,2} = 0{,}0103 \left(\frac{\ell_i}{R_c}\right)^{0,2} \int_0^{\frac{x}{R_c}} g \frac{F_1 E}{F_2} \left(\frac{R}{R_c}\right)^{1,2} d\left(\frac{x}{R_c}\right),$$

où F_1, F_2 et E sont donnés par les expressions :

$$F_1 = \frac{M_e^{4,08}}{(1+0{,}1\,M_e^2)^{6,405}} \quad , \quad (\gamma = 1{,}20),$$

$$F_2 = \frac{M_e^{0,2}}{1+0{,}1\,M_e^2},$$

$$E = M_e^{-1{,}45\left(1-\frac{T_p}{T}\right)}.$$

ℓ_i est un paramètre caractérisant les conditions génératrices de l'écoulement et homogène à une longueur :

$$\ell_i = \frac{\mu_i}{\rho_i a_i}$$

δ_2 étant ainsi calculé, on en déduit C_f et Ch.

- C_f est calculé à l'aide de :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0{,}0086\,g}{F_2} \left(\frac{\ell_i}{R_c}\right)^{m_o} \left(\frac{\delta_2}{R_c}\right)^{-m_o}.$$

On en déduit la contrainte tangentielle de frottement à la paroi par l'expression :

$$\tau_p = \rho_e u_e^2 \frac{C_f}{2}$$

d'où :

$$\frac{\tau_p}{p_c} = 0{,}01032 \frac{M_e^{1,8}}{(1+0{,}1 M_e^2)^5} g \left(\frac{l_c}{R_c}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{\partial_2}{R_c}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

- C_h peut aussi être calculé à partir d'une équation intégrale :

$$\frac{q_p}{\rho_e u_e h_{ie}} = \frac{d\Delta}{dx} + \Delta \left(\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \right),$$

où Δ est l'épaisseur d'énergie.
On écrit pour intégrer cette équation :

$$\frac{q_p}{\rho_e u_e h_{ie}} = \frac{B}{R_\Delta^{\frac{1}{6}}},$$

avec : $$B = 0{,}0086 g \left(\Delta \frac{h_p - h_f}{h_{ie}} \right)^{\frac{6}{5}}.$$

D'où $\Delta(x)$ puis C_h et h.

On préfère plutôt que d'effectuer à nouveau des calculs admettre que l'analogie de Reynolds subsiste, c'est-à-dire qu'il est possible de définir un facteur A tel que :

$$C_h = A \frac{C_f}{2}.$$

Si la formule de Colburn : $A = \sigma_r^{-\frac{2}{3}}$ est étendue à notre problème, il vient immédiatement, d'après les hypothèses déjà faites :

$$C_h \simeq \frac{C_f}{2} = \frac{0{,}0086}{F_2} g \left(\frac{l_c}{R_c}\right)^{m_0} \left(\frac{\partial_2}{R_c}\right)^{-m_0}.$$

On en déduit h ou h', coefficient de transfert thermique basé sur un écart de température et donc plus directement utilisable dans la suite des calculs :

$$h' = \frac{q_p}{T_{ie} - T_p} = 0{,}0516 \frac{M_e^{0,8}}{(1+0{,}1 M_e^2)^{4,5}} g \left(\frac{l_c}{R_c}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{\partial_2}{R}\right)^{-\frac{1}{5}} \frac{a_c p_c}{T_c}$$

Les calculs ont été menés pour les conditions de référence suivantes :

- tuyère biconique :
  - rapport d'entrée : $\frac{R_e}{R_c} = 6$,
  - rapport de sortie : $\frac{R_s}{R_c} = 3$,
  - rayon de courbure du col : $2R_c$,
  - angle du convergent : $\beta = 45°$,
  - angle du divergent : $\alpha = 15°$,
  - rayon du col : 10 mm.
- propergol métallisé à 16,4 % d'Al.,

$$T_i = 3300°K,$$

$$p_i = 70b,$$

$$\mu_i = 4{,}9 \times 10^{-5}\ kg\,m^{-1}s^{-1}$$

Les calculs ont d'abord été conduits pour une température uniforme de paroi égale à 2317°K, température de fusion de l'alumine, puis à deux autres températures (3300 et 1400°K). Il apparait que h' et τ_p sont assez peu sensibles à la température de paroi, laquelle n'intervient que dans le calcul de la température de référence. Cette constatation justifie a posteriori la possibilité de découpler l'étude du coefficient de transfert thermique et du frottement de paroi de celle de la couche condensée.

La figure 24 donne la variation de h' et de τ_p en fonction de l'abscisse prise le long de l'axe de la tuyère. Le coefficient h' est comparé à sa valeur calculée par la formule :

$$Nu_e = 0{,}023\ Re_e^{0,8}.$$

Cette formule sous-estime assez nettement le coefficient h' principalement dans la région du col, cette divergence provenant probablement des hypothèses, différentes dans les deux calculs, sur l'épaisseur de la couche limite à l'entrée de la tuyère ; les deux courbes se rapprochent l'une de l'autre dans le divergent, les conditions initiales ayant de moins en moins d'influence.

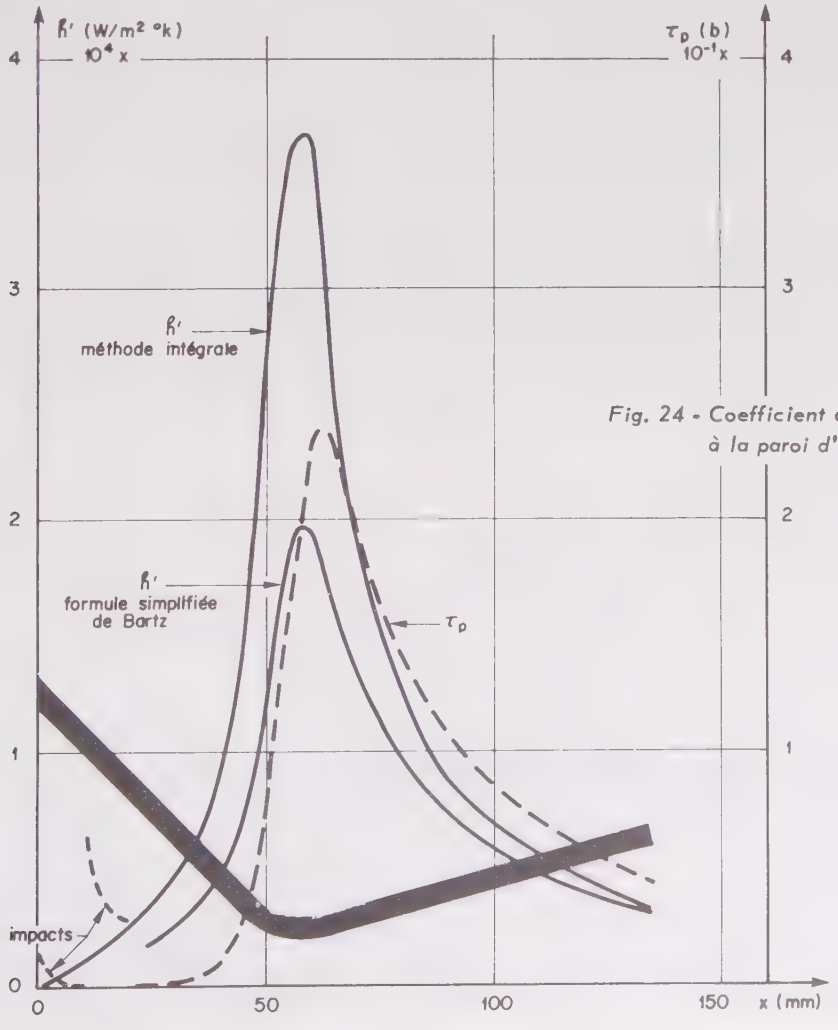


Fig. 24 - Coefficient de transfert thermique et frottement à la paroi d'une tuyère.

Pour connaître l'influence des conditions de fonctionnement du propulseur sur les grandeurs h' et τ_p il suffit de remarquer que :

- h' est proportionnel à $\dfrac{a_c p_c}{T_c}\left(\dfrac{T_c}{R_c p_c}\right)^{0,166}$
- τ_p est proportionnel à $p_c\left(\dfrac{T_c}{R_c p_c}\right)^{0,166}$

} à géométrie de tuyère constante

Comme T_c change peu avec la pression de fonctionnement, on peut conclure que h' et τ_p sont sensiblement proportionnels au groupement :

$$\frac{p_c^{0,834}}{R_c^{0,166}} .$$

Les échanges de paroi varient donc rapidement avec la pression mais diminuent relativement peu lorsque l'échelle du propulseur augmente.

Le caractère biphasique de l'écoulement a été jusqu'ici ignoré. On peut tenir compte de la phase condensée en définissant la viscosité cinématique du mélange [5]. Il faut également prendre en considération la quantité de mouvement et l'énergie apportées par les particules venant se coller sur la paroi. Ces apports modifient les expressions de h' et de τ_p par des termes correctifs :

$$\tau_p = (\tau_p)_0 + \rho_c q_v u_c ,$$

$$h' = (h')_0 + \rho_c c_v q_v ,$$

où q_v est la densité de flux de la phase condensée (en volume) interceptant la surface.

Une application numérique a été faite en supposant que 5 % du débit massique de la tuyère sont recueillis dans la première moitié du convergent, le flux étant une fonction exponentielle décroissante de l'abscisse curviligne le long de la paroi. On constate sur la figure 24 que les corrections ne sont sensibles qu'à l'entrée de la tuyère; le phénomène thermique est étudié plus en détail par la suite.

5,2. FORMATION DE LA COUCHE CONDENSÉE

Si la connaissance de τ_p est suffisante pour déterminer la perte due aux frottements, par contre le calcul du flux thermique passe par la connaissance non seulement de h' mais aussi de la température de paroi. Cette température résulte d'un bilan établi entre la chaleur transmise à la paroi par l'écoulement et celle transmise par conduction et l'on sait qu'elle est affectée par la présence d'une couche intermédiaire entre l'écoulement et la paroi. L'existence d'une couche d'alumine est constatée après extinction du propulseur ; cette couche est formée par l'impact de particules d'alumine (et dans une plus faible proportion, d'aluminium)

sur le convergent de la tuyère, ainsi qu'il l'a été démontré expérimentalement. La possibilité d'impacts sur la portion finale du divergent a aussi été mise en évidence dans le cas de tuyères profilées [52] mais ce phénomène qui a surtout une importance structurale (tenue de la tuyère à l'érosion) ne sera pas envisagé dans cette étude.

En dehors de la nécessité d'étudier les impacts dans le convergent pour déterminer la température de surface de la tuyère, il apparaît que ce phénomène agit directement sur les performances : la masse captée n'est pas éjectée (ou est éjectée sous la forme de gouttelettes assez grosses dont le rendement de propulsion est médiocre) et le défaut de masse éjectée conduit directement à une perte d'impulsion spécifique.

En dépit de son intérêt, le problème des impacts a été peu étudié. Zeamer [70] donne un critère pour qu'une particule arrivant vers la paroi puisse la rencontrer ; la relation est établie en comparant la distance d'arrêt d'une particule animée assez loin de la paroi d'une composante de vitesse normale à la paroi et l'épaisseur de la couche limite. On comprend mal dans cette théorie le rôle particulier joué par la couche limite ; le problème des impacts est en réalité lié aux trajectoires de particules dans tout l'écoulement. Le phénomène est donc particulièrement sensible à la structure de l'écoulement dans la zone d'entrée de la tuyère (valeur du rapport d'entrée, progressivité du convergent, intégration de la tuyère).

On conçoit bien que les impacts sont dûs aux écarts entre les lignes de courant de la phase gazeuse et les trajectoires des particules à la périphérie de l'écoulement. Qualitativement, l'intensité des impacts dépend, d'une part de la contraction plus ou moins brutale de l'écoulement qui se répercute sur la courbure des lignes de courant, d'autre part du niveau de vitesse lié lui-même au rapport de section. Les convergents abrupts et les faibles rapports de section d'entrée sont donc défavorables ; par ailleurs, la perte peut être accentuée par les collisions de particules plus nombreuses et leur croissance plus importante mais cet effet sera négligé ici. Le cas de la tuyère intégrée est plus complexe à cause de la confluence des écoulements provenant respectivement de l'amont du bloc et de la zone située derrière la partie intégrée de la tuyère.

Les impacts doivent être étudiés par une analyse bidimensionnelle de l'écoulement biphasique dans la zone d'entrée. En vue de connaître l'ordre de grandeur de la perte d'impulsion spécifique due aux impacts, perte jusqu'à présent inconnue, nous proposons un schéma de calcul simplifié pour une tuyère à convergent conique de rapport d'entrée modéré. L'écoulement entre la perforation du bloc et le col de la tuyère est schématisé de la façon suivante :

- l'écoulement gazeux dans la perforation du bloc est un écoulement par tranches.

- l'écoulement gazeux dans le convergent conique est un écoulement conique (écoulement puits).

- le raccordement entre ces deux types d'écoulement se fait par un écoulement de même nature que celui défini au paragraphe (334c) pour le col à rayon de courbure constant (figure 13) ; les lignes de courant dans cette zone appartiennent à un faisceau de cercles sécants tandis que les lignes d'un plan méridien sur lesquels les grandeurs sont constantes sont des portions des cercles du faisceau conjugué.

Les trajectoires des particules sont étudiées dans ce champ de vitesse gazeux (régime de Stokes).

a) Etude des trajectoires dans la zone intermédiaire

Dans la perforation du bloc, les écarts cinétiques entre phases sont

très réduits, les lignes de courant et les trajectoires sont assimilables à des parallèles à l'axe du propulseur. C'est dans la zone intermédiaire, décrite par le système de coordonnées curvilignes toriques-sphériques que les divergences entre lignes de courant et trajectoires commencent à se manifester.

Avant de déterminer les équations du mouvement d'une particule, il est indispensable de passer par les intermédiaires suivants : écrire les formules de transformation des coordonnées curvilignes en coordonnées rectangulaires, établir les expressions des vecteurs de la base naturelle puis celles des vecteurs unitaires de la base banale et donner les composantes banales de la vitesse.

Avec les notations de la figure 25, on arrive finalement aux deux équations suivantes pour les composantes u et v de la vitesse d'une particule :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + v\,\dfrac{\mathrm{sh}\,\xi\, v + \sin\varphi\, u}{a} = \dfrac{1}{\tau_u}(u_g - u), \\ \dfrac{dv}{dt} - u\,\dfrac{\mathrm{sh}\,\xi\, v + \sin\varphi\, u}{a} = -\dfrac{1}{\tau_u} v, \end{cases}$$

avec : $a = r_e$ et $v_g = 0$ par hypothèse,

$$u = \frac{a}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}\,\frac{d\xi}{dt},$$

$$v = \frac{a}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Pour résoudre ce système, on utilise une méthode de perturbation. Les grandeurs sont tout d'abord réduites en choisissant une vitesse de référence u_R et en posant :

$$u^* = \frac{u}{u_R}, \quad v^* = \frac{v}{v_R}, \quad \tau = \frac{t\,u_R}{a}.$$

Il apparaît une quantité sans dimension, très petite, qui sera choisie comme paramètre de perturbation :

$$\varepsilon = \frac{\tau_u u_R}{a}.$$

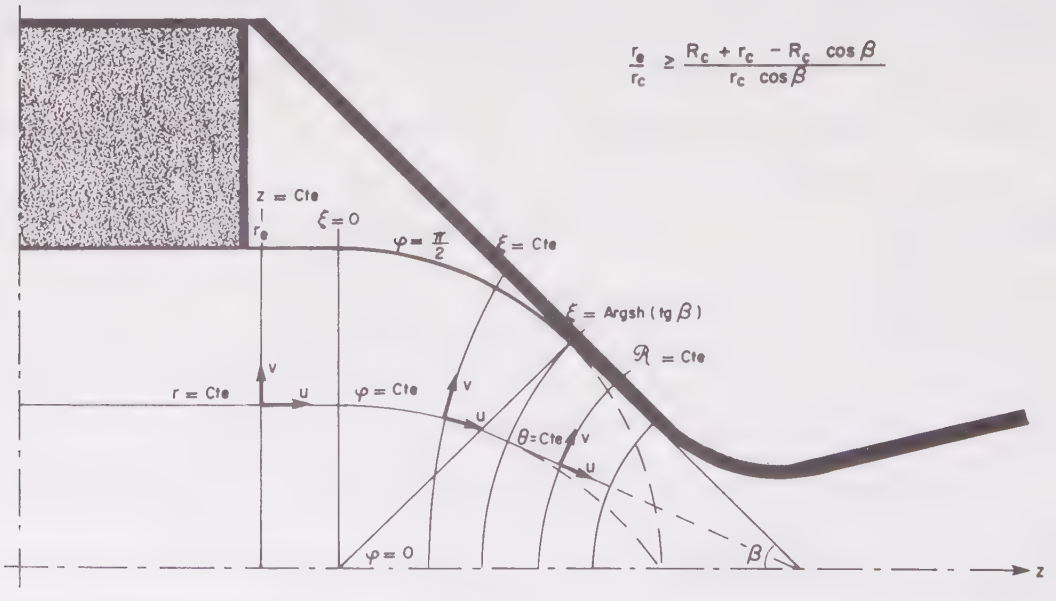


Fig. 25 - Schématisation de l'écoulement gazeux dans la zone d'entrée de la tuyère pour l'étude des impacts.

Les équations réduites s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du^*}{d\tau} + \varepsilon v^* (sh\zeta\, v^* + \sin\varphi\, u^*) = u_g^* - u^*, \\ \varepsilon \dfrac{dv^*}{d\tau} - \varepsilon u^* (sh\zeta\, v^* + \sin\varphi\, u^*) = -v^*. \end{cases}$$

A l'ordre 0, on obtient :

$$u^{(0)*} = u_g^* \,, \quad v^{(0)*} = 0 \,.$$

A l'ordre ε, les calculs donnent :

$$u^{(1)*} = -\frac{du_g^*}{d\tau} \,,$$

$$v^{(1)*} = u_g^{*2} \sin\varphi \,.$$

On s'intéresse surtout aux écarts dûs à la vitesse transversale v. On se limitera donc pour u à l'approximation d'ordre 0 et pour v à l'approximation d'ordre ε. En revenant aux grandeurs non réduites, on a donc :

$$\begin{cases} u = \dfrac{a}{ch\zeta + \cos\varphi} \dfrac{d\zeta}{dt} \simeq u_g \,, \\ v = \dfrac{a}{ch\zeta + \cos\varphi} \dfrac{d\varphi}{dt} \simeq \dfrac{\tau_u}{a} u_g^2 \sin\varphi \,. \end{cases}$$

La dernière expression montre que v croît avec la taille de la particule, par l'intermédiaire du paramètre de relaxation τ_u, avec la vitesse et la proximité de la paroi (φ voisin de $\frac{\pi}{2}$) et décroit avec le rapport d'entrée.

En divisant les deux équations, membre à membre, on obtient l'équation des trajectoires sous forme différentielle :

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{\tau_u u_g}{a} \sin\varphi,$$

soit après intégration :

$$\operatorname{Log} \frac{tg\frac{\varphi_2}{2}}{tg\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\tau_u}{a} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} u_g(\zeta)\, d\zeta$$

Cette relation implicite permet de calculer localement l'écart d'une trajectoire et d'une ligne de courant caractérisées par les mêmes conditions initiales (φ_1 , ζ_1).

b) Etude des trajectoires dans la zone conique du convergent.

Le calcul est effectué dans cette zone comme dans la zone intermédiaire. Les équations du mouvement d'une particule s'écrivent ici :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{1}{\tau_u} (u_g - u) \,, \\ \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{uv}{R} = -\dfrac{v}{\tau_u} \,, \end{cases}$$

avec : $v_g = 0$ par hypothèse,

$$u = \frac{dR}{dt} ,$$

$$v = R\frac{d\theta}{dt} .$$

Pour obtenir les équations réduites, on choisit une vitesse u_R et une longueur L_R de référence et on pose :

$$\varepsilon = \frac{\tau_u u_R}{L_R} , \quad R^* = \frac{R}{L_R} , \quad u^* = \frac{u}{u_R} , \quad v^* = \frac{v}{u_R} , \quad \tau = \frac{t u_R}{L_R} .$$

Il vient donc :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du^*}{d\tau} - \varepsilon \dfrac{v^{*2}}{R} = u_g^* - u^* , \\ \varepsilon \dfrac{dv^*}{d\tau} + \varepsilon \dfrac{u^* v^*}{R} = - v^* . \end{cases}$$

Le calcul montre que $v^{(1)}$ est nul ce qui indique que les écarts latéraux sont au plus du second ordre par rapport à ε . Ce résultat est logique : dans un écoulement conique, les lignes de courants sont rectilignes ; une vitesse latérale v_0 est amortie sur une distance proportionnelle au produit de τ_u par v_0 . On a montré que la vitesse initiale au point de raccordement des deux zones est elle même proportionnelle à τ_u . Les écarts dans le convergent conique sont donc du second ordre et seront par conséquent négligés ; la formule établie dans la zone intermédiaire est donc suffisante.

c) Calcul de la masse captée et de la perte d'impulsion spécifique

Reprenons la formule :

$$\operatorname{Log} \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\tau_u}{a} \int_{\eta_1}^{\eta_2} u_g(\eta)\, d\eta .$$

On doit tout d'abord expliciter les variations de u_g avec η . Pour ce faire, on peut supposer pour simplifier l'écoulement de référence incompressible :

$$u_g(\eta_1) A_1 = u_g(\eta) A .$$

Le calcul de la surface A conduit à :

$$A = \frac{2\pi a^2}{\operatorname{ch}\eta (1+\operatorname{ch}\eta)} ,$$

d'où :

$$u_g(\eta) = u_g(\eta_1) \frac{\operatorname{ch}\eta (1+\operatorname{ch}\eta)}{\operatorname{ch}\eta_1 (1+\operatorname{ch}\eta_1)} ,$$

et :

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} u_g(\eta)\, d\eta = \frac{u_g(\eta_1)}{\operatorname{ch}\eta_1 (1+\operatorname{ch}\eta_1)} \left[\operatorname{sh}\eta + \frac{\eta + \operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta}{2} \right]_{\eta_1}^{\eta_2} .$$

Considérons que les conditions 1 et 2 correspondent aux lignes de raccordement entre les zones et que l'on considère un impact sur la paroi, c'est-à-dire :

$$\eta_1 = 0 , \quad \eta_2 = \operatorname{Arg\,sh}(\operatorname{tg}\beta) ,$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} , \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{r_1}{r_c} .$$

Il vient : $$-\log\frac{r_1}{r_e} = \frac{\tau_u}{r_e}\,u_{ge}\times\frac{\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{2}\left[\log\left(\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{\cos\beta}\right)+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\right]}{\ell}\,.$$

Cette relation détermine la position initiale d'une particule de rayon donné qui rencontre la paroi à l'entrée du convergent conique. **Inversement**, considérant une position initiale donnée caractérisée par r_1 , on peut calculer une valeur r_{pm} du rayon telle que toutes les particules de rayon supérieur soient obligatoirement captées.

Dans un tube de courant de section $2\pi r_1 dr_1$, le débit massique de la phase condensée est :

$$d\dot{m}_p = \rho_p u_{pe}\, 2\pi r_1 dr = 2\pi u_{ge}\left(\int_0^\infty \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_c f(r_p)dr_p\right) r_1 dr_1\,.$$

Le débit massique capté par la paroi est :

$$d\dot{m}_{pc} = 2\pi u_{ge}\left(\int_{r_{pm}(r_1)}^\infty \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_c f(r_p)dr_p\right) r_1 dr_1\,.$$

Le débit total capté est obtenu par intégration :

$$\dot{m}_{pc} = 2\pi u_{ge}\int_0^{r_e}\left(\int_{r_{pm}(r_1)}^\infty \frac{4}{3}\pi r_p^3\rho_c f(r_p)dr_p\right) r_1 dr_1$$

$$= \pi u_{ge} r_e^2 \int_0^1 \left(\int_{r_{pm}\left(\left(\frac{r_1}{r_e}\right)^2\right)}^\infty \frac{4}{3}\pi r_p^3\rho_c f(r_p)dr_p\right) d\left(\frac{r_1}{r_e}\right)^2.$$

Soit, en ramenant, le débit capté au débit **total:**

$$\frac{\dot{m}_{pc}}{\dot{m}_p} = \varepsilon\,\frac{\displaystyle\int_0^1\left(\int_{r_{pm}(b)}^\infty r_p^3 f(r_p)dr_p\right)db}{\displaystyle\int_0^\infty r_p^3 f(r_p)dr_p}\,,$$

où $\varepsilon = \dfrac{K}{1+K}$, rapport du débit de la phase condensée au débit total.

L'intégrale du numérateur peut être transformée en permutant l'ordre des intégrations :

$$\int_0^1\left(\int_{r_{pm}(b)}^\infty r_p^3 f(r_p)dr_p\right)db = \int_0^\infty\left(\int_{b(r_p)}^1 db\right) r_p^3 f(r_p)\,dr_p$$

$$= \int_0^\infty \left[1-b(r_p)\right] r^3 f(r_p)\,dr_p\,.$$

Or :

$$1-b(r_p) = 1-\frac{r_1^2}{r_e^2} \simeq -2\log\frac{r_1}{r_e} = 2\times\frac{2r_p^2\rho_c u_{ge}}{9\mu r_e}\times\frac{\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{2}\left[\log\left(\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{\cos\beta}\right)+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\right]}{\ell}$$

L'intégration fait donc apparaître le rayon moyen r_{53} . En définitive, on peut écrire :

$$\frac{\dot{m}_{pc}}{\dot{m}_p} = \mathcal{E}\,\frac{\overline{\tau_{uo}}\,u_{ge}}{r_e}\,g(\beta),$$

où l'indice o indique qu'il s'agit du rayon moyen dans la chambre et où la signification de $g(\beta)$ est évidente.

La perte relative d'impulsion spécifique est proportionnelle à la masse relative non éjectée, laquelle est inférieure à la masse captée par la tuyère. Par ailleurs, il est intéressant de ramener la vitesse u_{ge} à la célérite du son $\overline{a_o^{(e)}}$ à l'équilibre biphasique dans la chambre et le rayon r_e au rayon du col r_c . Après transformation, il vient finalement, lorsque $\frac{r_e}{r_c}$ reste assez grand :

$$\frac{|\partial I|}{I^{(e)}} \leq \mathcal{E}\,\frac{\overline{\tau_{uo}}\,\overline{a_o^{(e)}}}{r_c}\left(\frac{\overline{\gamma}+1}{2}\right)^{-\frac{\overline{\gamma}+1}{2(\overline{\gamma}-1)}}\left(\frac{r_e}{r_c}\right)^3\left[\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{2}\left[\log\left(\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{\cos\beta}\right)+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\right]\right]$$

Cette formule ressemble à celle établie pour la perte due aux écarts entre phases en proche équilibre : elle est proportionnelle à la teneur en métal du propergol par l'intermédiaire de $\mathcal{E}$, à un facteur sans dimension où intervient la constante de relaxation moyenne des particules, une vitesse $\overline{a_o^{(e)}}$ caractéristique de l'état des produits de combustion dans la chambre et l'échelle du propulseur par le rayon du col, et enfin à un facteur géométrique dépendant principalement du rapport d'entrée et de l'angle du convergent. Pour étendre cette formule à des conditions d'entrée plus difficiles (rapport d'entrée voisin de 1, convergent très abrupt), on peut penser qu'il suffirait de modifier le facteur géométrique.

5,3. DÉVELOPPEMENT ET DESTRUCTION DE LA COUCHE CONDENSÉE

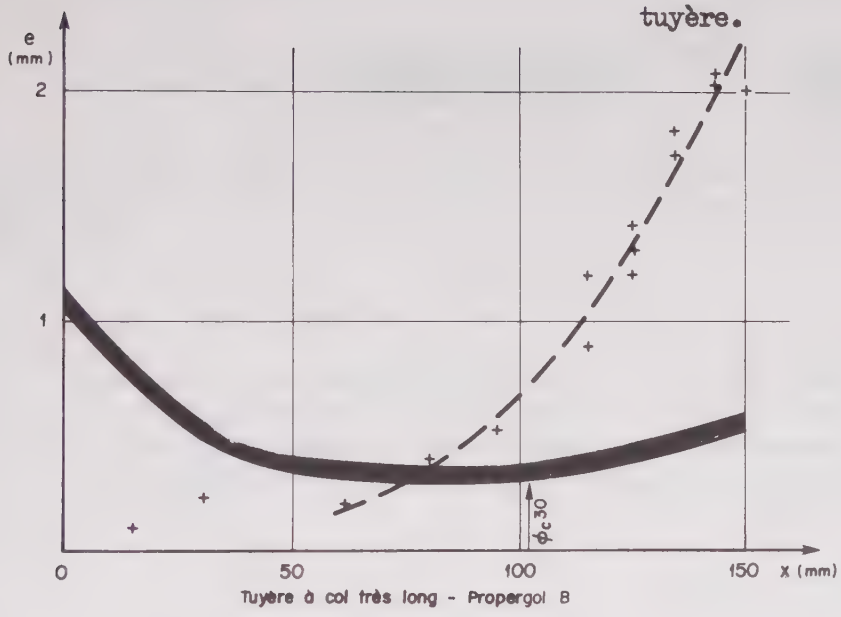
Le développement de la couche condensée dépend à la fois de l'écoulement et du problème thermique de paroi. L'écoulement intervient par l'impact des particules ; le débit massique déposé localement dépend du temps en raison de la modification de la géométrie d'entrée de la tuyère due à la combustion du bloc de propergol et à l'augmentation du diamètre moyen de la perforation. L'échauffement de la paroi ne dépend plus seulement du transfert thermique dû à la couche limite mais aussi du transfert au travers de la couche condensée ; l'épaisseur de la couche, l'état physique de la couche (liquide ou solide suivant la température), les propriétés thermiques interviennent donc. Le développement de la couche condensée ne se poursuit pas toujours sur toute la surface : la géométrie de la tuyère semble jouer un rôle important comme le montre la figure 26. Le film d'alumine ne se développe pas au-delà du col lorsque le rayon de courbure du col est faible devant son rayon, du moins pour les petits propulseurs. Il y a donc lieu de chercher le phénomène qui désintègre la couche d'alumine et les résultats de cette désintégration.

La couche condensée n'a pas été étudiée jusqu'à aujourd'hui, mis à part quelques résultats très fragmentaires dûs à Colucci [3] et Unger [71]. Nous tenterons de dégager certains traits généraux du problème qui peuvent avoir une inci-

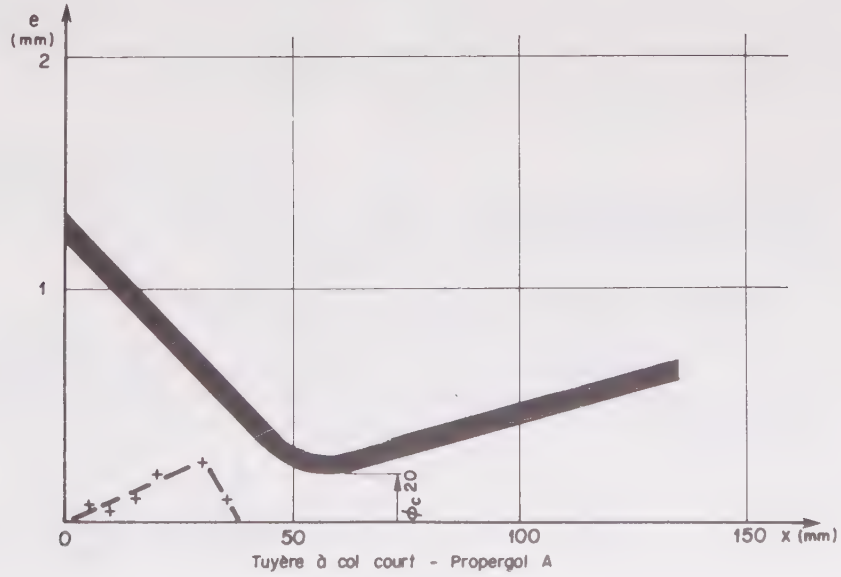
dence sur l'estimation de la perte d'impulsion spécifique de paroi. Quelques simplifications seront faites pour permettre une étude locale du transfert thermique : l'accumulation de chaleur dans la couche est négligée devant la quantité de chaleur transmise [71] ; la conduction de la chaleur parallèlement à la paroi est un phénomène du second ordre en raison des flux intenses et la tuyère est considérée infiniment épaisse ce qui nous affranchit des influences extérieures. Le problème de la conduction dans la tuyère est ainsi assimilé à celui du mur semi infini avec des conditions de surface variables ; en réalité il faudrait tenir compte d'une courbure de la surface mais en première approximation cette particularité est négligée. Même pour des propriétés thermiques constantes, la relation entre la température et la densité de flux de paroi ne prend pas une forme simple. Des calculs classiques [72] permettent d'aboutir à l'équation intégrale :

$$T_p(t) - T_o = \Theta_p(t) = \frac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} ,$$

où a_p et λ_p sont la diffusivité et la conductibilité thermique du matériau de la tuyère.



Tuyère à col très long - Propergol B



Tuyère à col court - Propergol A

Fig. 26 - Epaisseur du dépôt d'alumine recueilli après tir.

La densité de flux peut aussi être exprimée à partir des différents transferts thermiques. Avec les notations de la figure 27, il vient :

$$q = h'(\theta_i - \theta_\delta) = \frac{\lambda_e}{\delta}(\theta_\delta - \theta_\Delta) = \frac{\lambda_s}{\Delta}(\theta_\Delta - \theta_p)$$

$$= \frac{\theta_i - \theta_p}{\frac{1}{h'} + \frac{\delta}{\lambda_e} + \frac{\Delta}{\lambda_s}} \quad .$$

En éliminant la température de paroi T_p , on obtient une équation intégrale pour le flux :

$$\frac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(\tau)d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} + \left(\frac{1}{h'} + \frac{\delta}{\lambda_e} + \frac{\Delta}{\lambda_s}\right) q(t) = \theta_i \quad .$$

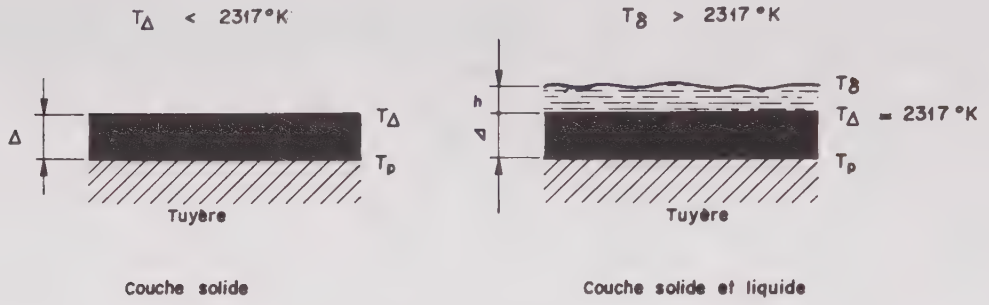


Fig. 27 - Notations utilisées pour l'étude de la couche condensée.

Dans cette équation les épaisseurs δ et Δ et dans une moindre mesure le coefficient h' (phase d'allumage, modification de la géométrie d'entrée au cours du temps) doivent être considérés comme des fonctions du temps. On peut chercher à savoir si la présence de la couche est réellement importante ; elle pourrait être négligée à condition par exemple que :

$$\Delta \ll \frac{\lambda_s}{h'} \quad .$$

Une application numérique nous conduit à :

$\Delta \ll$ 0,2 mm au col,

$\Delta \ll$ 1,7 mm au milieu du convergent (figure 26).

Ce sont là en réalité des ordres de grandeurs couramment observés ; il faut donc étudier le phénomène de façon plus précise.

a) Epaisseur du dépôt négligeable ou inexistant

Le calcul est alors conduit de manière classique comme pour un propergol non métallisé. Si l'on considère h' constant, on aboutit analytiquement à la solution :

$$\frac{q(t)}{h'\theta_i} = \exp\left(\frac{a_p h'^2}{\lambda_p^2} t\right) \times \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a_p h'^2}{\lambda_p^2} t}\right) ,$$

$$\frac{\theta_p}{\theta_i} = 1 - \exp\left(\frac{a_p h'^2}{\lambda_p^2} t\right) \times \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a_p h'^2}{\lambda_p^2} t}\right)$$

On remarque que ces formules peuvent être étendues au cas où il existe une couche d'épaisseur constante Δ et un échange par rayonnement entre les produits de combustion et la paroi, la couche étant transparente au rayonnement et la température de paroi assez faible devant Ti. On définit alors un coefficient d'échange thermique $\bar{h}$ équivalent par la formule :

$$\frac{1}{\bar{h}} = \frac{1}{h'} + \frac{\Delta}{\lambda_s} \quad ,$$

ou

$$\bar{h} = \frac{h'\lambda_s}{\lambda_s + h'\Delta} < h' .$$

Il vient :

$$\frac{q(t)}{\bar{h}\theta_i + a\sigma T_i^4} = \exp\left(\frac{a_p \bar{h}^2 t}{\lambda_p^2}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a_p \bar{h}^2}{\lambda_p^2} t}\right),$$

$$\frac{\theta_p}{\theta_i + \frac{a\sigma T_i^4}{\bar{h}}} = 1 - \exp\left(\frac{a_p \bar{h}^2 t}{\lambda_p^2}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a_p \bar{h}^2 t}{\lambda_p^2}}\right)$$

La figure 28 donne l'allure des courbes de flux et de température pour des grandeurs réduites. La température croît avec le temps, tandis que le flux décroît. Un changement de $\bar{h}$ se traduit simplement par une dilatation de l'échelle des temps.

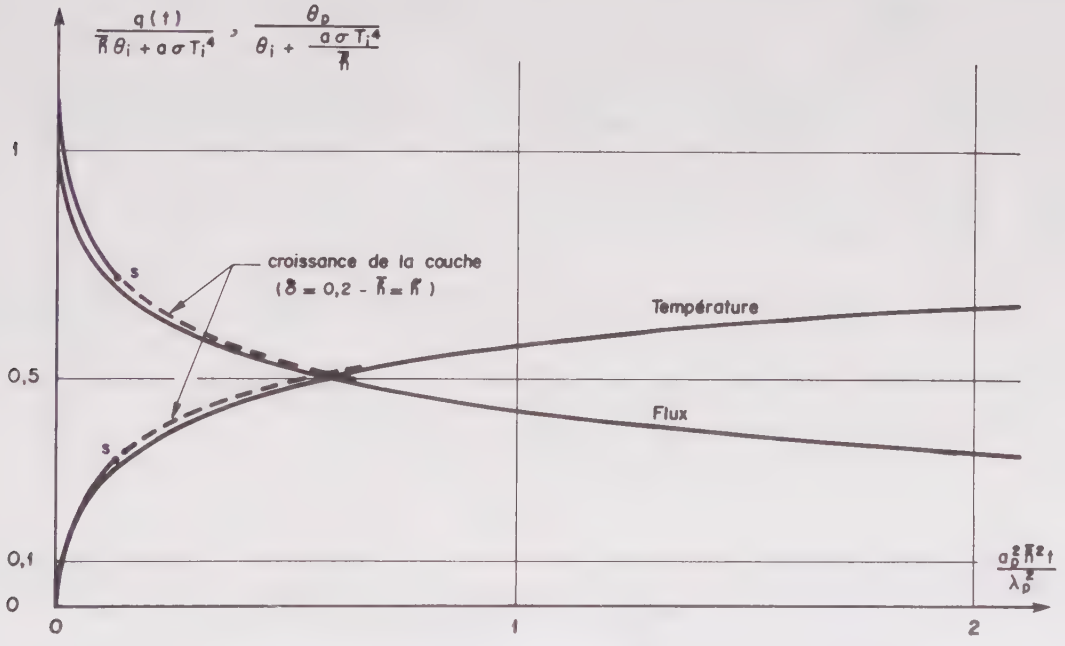


Fig. 28 - Evolution dans le temps du flux et de la température de paroi sans variation de la couche condensée (h = cte).

Plutôt que la valeur instantanée du flux, c'est sa valeur moyenne au cours du fonctionnement du propulseur qui permet d'estimer la perte thermique globale. On forme donc :

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} q(t)\,dt .$$

Les calculs donnent :

$$\frac{\bar{q}}{\bar{h}\theta_i + a\sigma T_i^4} = f\left(\sqrt{\frac{a_p \bar{h}^2 t_b}{\lambda_p^2}}\right), \text{ où } f(z) = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} z - (1 - e^{z^2}\operatorname{erfc} z)}{z^2} .$$

La fonction $f(\tau)$ peut être tabulée facilement ; elle décroît avec le temps de combustion t_b (paroi en moyenne plus chaude) et avec le coefficient d'échange thermique $\overline{h}$ (échauffement plus rapide de la paroi).

b) Epaisseur du dépôt non négligeable, la couche étant toujours solide .

La couche reste solide si la température de sa surface, au contact de l'écoulement, ne dépasse pas la température de fusion de l'alumine ; les particules se solidifient à leur point d'impact ce qui facilite dans une certaine mesure le calcul de l'épaisseur de la couche.

La densité de flux transmise à la paroi de la tuyère se compose de la densité de flux de rayonnement et de la densité de flux de conduction, au travers de la couche solide, due à la convection et à la puissance thermique apportée par les particules. Appelons f la densité massique de flux captée, c'est-à-dire la masse condensée arrivant par unité de temps et de surface sur la couche. La couche étant solide, f est lié à la vitesse de croissance de la couche ; les particules se solidifiant au point d'impact de façon quasi instantanée, on a :

$$f = \rho_c \frac{d\Delta}{dt} .$$

L'énergie apportée par les particules se décompose en un terme de chaleur sensible et un terme de changement d'état (l'énergie cinétique des particules, modérée dans le convergent, est négligée) :

$$q_p = f \left[C_c (T_c - T_A) + L_f \right] ,$$

où C_c est la chaleur massique de l'alumine, L_f son enthalpie massique de fusion, T_c sa température (T_c voisin de T_i dans le convergent).

Il vient donc :

$$q - \sigma T_i^4 = \frac{\lambda_s}{\Delta} (\theta_A - \theta_P) = h'(\theta_i - \theta_A) + \rho_c \frac{d\Delta}{dt} \left[C_c (\theta_i - \theta_A) + L_f \right]$$

θ_A est tout d'abord éliminé pour obtenir θ_P . Pour simplifier, on suppose en outre une variation linéaire de Δ avec le temps :

$$\Delta = \alpha t .$$

Cette hypothèse implique que f est constant, c'est-à-dire que les phénomènes transitoires, dûs par exemple aux variations de la géométrie d'entrée liées à la combustion, modifient peu les impacts.

L'équation pour le flux q s'écrit finalement :

$$\frac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \left(\frac{1}{h' + \rho_c C_c \alpha} + \frac{\alpha t}{\lambda_s} \right) q = \theta_i + \sigma T_i^4 \frac{\alpha t}{\lambda_s} + \frac{\sigma T_i^4 + \rho_c L_f \alpha}{h' + \rho_c C_c \alpha} .$$

Il est intéressant d'écrire cette équation pour des grandeurs réduites. Comme on cherche à comparer q à sa valeur sans couche condensée, on ramènera q à la quantité $\theta_i h' + \sigma T_i^4$ et t à $\frac{\lambda \rho^2}{a_p h'^2}$.

Les calculs montrent l'existence de paramètres sans dimensions :

- $d = \frac{\rho_e C_e \alpha}{h'}$, rapport de la chaleur sensible apportée par les particules à celle apportée par la couche limite,

- $\beta = \frac{a_e \ell}{a_p} \frac{\lambda_p^2}{\lambda_{ce} \lambda_s}$, paramètre thermique lié à la nature des matériaux (alumine, paroi),

- $R = \frac{\sigma T_i^4}{\Theta_i h'}$, paramètre caractérisant l'importance relative du rayonnement,

- $\ell = \frac{L_f}{C_e \Theta_i}$, enthalpie réduite de fusion.

L'équation réduite est :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \left[\frac{1}{1+d} + \beta d \tau \right] q = \frac{1+R+d(1+\ell)}{(1+R)(1+d)} + \frac{R}{1+R} \beta d \tau .$$

Le calcul numérique montre que d est au plus de l 'ordre de 1 et inférieur à 0,1 lorsque le rapport de section est inférieur à 4. En l'absence d'une solution analytique, on a cherché une solution par la méthode des perturbations, d étant le paramètre de perturbation.

On utilise tout d'abord la transformée de Laplace pour se ramener à une équation différentielle :

$$-\frac{\beta d}{2} \frac{dF}{d\sqrt{p}} + \left(1 + \frac{\sqrt{p}}{1+d}\right) F = \frac{(1+R)+d(1+\ell)}{(1+R)(1+d)} \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{R \beta d}{1+R} \frac{1}{p\sqrt{p}} .$$

A l'ordre 0, il vient :

$$F^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{p}(1+\sqrt{p})} \quad \text{où} \quad q^{(0)} = e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}),$$ solution classique en l'absence de couche.

A l'ordre d, on obtient :

$$F^{(1)} = \frac{1}{(1+\sqrt{p})^2} + \frac{\beta}{2} \left[\frac{1}{(1+\sqrt{p})^3} - \frac{1}{p(1+\sqrt{p})} \right] + \frac{\ell R}{1+R} \frac{1}{\sqrt{p}(1+\sqrt{p})} + \frac{R\beta}{1+R} \frac{1}{p\sqrt{p}(1+\sqrt{p})}$$

L'inversion de la fonction $F^{(1)}$ est assez longue ; nous donnons seulement le résultat final :

$$q^{(1)} = -\beta\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{1+R}\right) + \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[\beta t + \beta\left(1 + \frac{\ell R}{1+R}\right) - 2 \right] + \left[-\beta t^2 + \left(2 - \frac{3\beta}{2}\right) t + \frac{1+\ell}{1+R} + \beta\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{1+R}\right) \right] \times e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$$

L'expression approchée de la densité de flux sera donc :

$$q \simeq q^{(0)} + d\, q^{(1)} .$$

On peut déduire de q les températures de paroi et de surface Θ_p et Θ_s

(réduite à $\Theta_c(1+R)$) :

$$\Theta_p = \Theta_p^{(0)} + d\,\Theta_p^{(1)},$$

$$\Theta_\Delta = \Theta_\Delta^{(0)} + d\,\Theta_\Delta^{(1)},$$

avec :

$$\Theta_p^{(0)} = \Theta_\Delta^{(0)} = 1 - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{F})$$

$$\Theta_p^{(1)} = \frac{\beta}{2} + \frac{\ell - R}{1+R} + \frac{R\beta}{1+R}(1+t) - \sqrt{\frac{F}{\pi}}\left[\beta t + \beta\left(1 + \frac{\ell R}{1+R}\right) - \ell\right] +$$
$$+ \left[\beta t^2 + \left(\frac{\beta}{2} - \ell\right)t - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\ell - R}{1+R} + \frac{R\beta}{1+R}\right)\right] e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{F})$$

$$\Theta_\Delta^{(1)} = \frac{\beta}{2} + \frac{\ell - R}{1+R} + \frac{R\beta}{1+R} - \sqrt{\frac{F}{\pi}}\left[\beta t + \beta\left(1 + \frac{\ell R}{1+R}\right) - \ell\right] +$$
$$+ \left[\beta t^2 + \left(\frac{3\beta}{2} - \ell\right) - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\ell - R}{1+R} + \frac{R\beta}{1+R}\right)\right] e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{F})$$

On devra vérifier que la température de surface Θ_Δ ne dépasse la température de fusion de l'alumine soit, en grandeur réduite :

$$\Theta_\Delta < \frac{T_f - T_0}{(T_c - T_0)(1+R)}.$$

Il est également nécessaire de calculer la densité de flux moyenne au cours de l'intervalle de temps (0, t). On a ramené cette grandeur à sa valeur sans couche :

$$\frac{\bar{q}}{q^{(0)}} = 1 + d\left\{ -\beta t^2 + \left(\ell + \frac{\beta}{2}\right)t + \frac{\ell - R}{1+R} + \frac{\beta R}{1+R} - 1 + \right.$$
$$\left. + \frac{-\beta t^2 + \left(\ell - \frac{\beta R}{1+R}\right)t + \sqrt{\frac{F}{\pi}}\left[2\beta t^2 - 4\left(1 - \frac{\beta R}{3(1+R)}\right)t\right]}{\ell\sqrt{\frac{F}{\pi}} - \left(1 - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{F})\right)} \right\}$$

Pour l'application numérique, on a choisi pour ℓ, la valeur relative à un rapport moyen du rayon de la perforation du bloc au rayon du col de l'ordre de 4 , ce qui correspond bien à nos essais et pour α la valeur de 0,1 mm/s qui apparait assez réaliste.
On en déduit :

$$d \simeq 0{,}2 \quad \beta \simeq 1 \quad R \simeq 1 \quad \ell = 0{,}24 .$$

On note que la valeur de d corespond bien au domaine d'application de la méthode de perturbation et on remarque l'importance du rayonnement en ce point.

Les résultats du calcul sont reportés sur la figure 28 :

- le flux est légèrement plus fort qu'en l'absence de couche, l'écart tendant à diminuer au cours du temps. Ce résultat est dû dans les premiers instants à l'énergie apportée par les particules.

- la température de paroi croît légèrement plus vite qu'en l'absence de couche. Ce résultat ne pouvait être connu à priori, car deux effets s'opposent : l'accroissement du flux dû aux impacts et son blocage par la couche condensée.

- le flux moyen ne diffère de sa valeur sans couche que de 10 % environ au début du phénomène ; cet écart est inférieur à la précision que l'on peut attendre des calculs de flux thermiques.

On observe par ailleurs que la température de fusion de l'alumine est atteinte rapidement à cet endroit ; le calcul donne $t_s \simeq 1{,}2$ s, temps auquel $\Theta_{ps} \simeq 1000°C$ et $\Delta_s \simeq 0{,}12$ mm.

c) couche condensée solide sur la paroi de la tuyère, liquide à l'interface avec l'écoulement .

La température de surface de la couche condensée dépassant la température de fusion de l'alumine, mais la température de paroi y restant inférieure, il existe en réalité deux couches distinctes liquide et solide. On admettra pour simplifier que le changement d'état est franc et sans changement de masse volumique. La même échelle des temps est conservée. La relation entre la température de surface et le flux est donc :

$$\Theta_p = \Theta_{ps} + \frac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p \sqrt{\pi}} \int_{t_s}^{t} \frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad , \quad t \geq t_s .$$

q se décompose en un terme de rayonnement $a\sigma T_i^4$ et un terme de conduction à travers la couche solide :

$$q_{cond_s} = \frac{\lambda_s}{\Delta}(\Theta_{p_\Delta} - \Theta_p) .$$

Cette densité de flux est égale à celle due à la conduction dans la couche liquide augmentée de la chaleur dégagée par la solidification :

$$q_{cond_s} = \frac{\lambda_L}{\delta}(\Theta_\delta - \Theta_\Delta) + \rho_c L_f \frac{d\Delta}{dt} .$$

La densité de flux de conduction dans la couche liquide correspond à la densité de flux de convection et à la chaleur sensible apportée par les particules (leur énergie cinétique est négligée) :

$$h'(\Theta_i - \Theta_\delta) + f C_c (\Theta_i - \Theta_\delta) .$$

L'élimination entre les différentes équations de Θ_δ et de Θ_p (Θ_Δ est une constante, la température de solidification) permet d'écrire les deux équations finales :

$$\frac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p \sqrt{\pi}} \int_{t_s}^{t} \frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\Delta}{\lambda_s} q = \Theta_\Delta - \Theta_{p_s} + \frac{\Delta}{\lambda_s} a\sigma T_i^4 ,$$

$$\rho_c L_f \frac{d\Delta}{dt} = q - a\sigma T_i^4 - (\Theta_i - \Theta_\Delta) \frac{h' + f C_c}{1 + \frac{\delta}{\lambda_\ell}(h' + f C_c)} .$$

f étant supposé connu, ces équations ne contiennent que 3 inconnues : q , δ , Δ ; il manque donc une équation, obtenue par l'étude de la couche liquide. L'équation thermique de cette couche a déjà été utilisée et découplée des autres équations ; il reste donc à exploiter l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement. On négligera ici les effets transitoires et on supposera modérées les variations locales de l'épaisseur de couche.

L'équation de quantité de mouvement est utilisée implicitement en supposant un profil de vitesse parabolique dans la couche liquide. Cette loi résulte de l'étude de l'équilibre d'un élément liquide :

$$\frac{d\tau_{pL}}{dy} = \frac{dp}{dx} \quad , \qquad (x : \text{abscisse curviligne}).$$

où la pression p est connue par l'écoulement.

Lorsqu'on suppose constante la viscosité dynamique, l'intégration de cette relation conduit au profil annoncé. Les constantes d'intégration sont déterminées par la condition d'annulation de la vitesse à l'interface liquide solide et le raccordement des forces tangentielles à l'interface liquide gaz :

$$(\tau_{pL})_\delta = \tau_p \ ,$$

τ_p étant déterminé par l'étude de la couche limite classique (la vitesse d'interface est faible devant la vitesse de l'écoulement) et la quantité de mouvement apportée par les particules étant négligée.

Il vient donc :

$$u = \frac{1}{2\mu_L}\frac{dp}{dx}y^2 + \frac{1}{\mu_L}\left(\tau_p - \delta\frac{dp}{dx}\right)y \ , \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta .$$

Cette expression permet de calculer le débit instantané local :

$$\dot{m}_L = \frac{2\pi R\rho_c}{6\mu_L}\left(3\delta^2\tau_p - 2\delta^3\frac{dp}{dx}\right), \quad \frac{\delta}{R} \ll 1 .$$

L'équation de continuité indique que l'accroissement du débit suivant x est dû à l'arrivée des particules sur la couche liquide moins le débit perdu par solidification. D'où finalement :

$$\rho_c\frac{d\Delta}{dt} = f - \frac{\rho_c}{6\mu_L}\frac{d}{dx}\left[3\delta^2\tau_p - 2\delta^3\frac{dp}{dx}\right] .$$

C'est la troisième équation cherchée. Le problème est donc entièrement défini par les trois équations et les conditions limites :

$$t = t_s : \quad \delta = 0 \ , \quad \Delta = \Delta_s \ .$$

Il apparaît un couplage entre les variations temporelles locales des grandeurs caractéristiques de la couche et leurs variations spatiales, à cause de l'écoulement du liquide. La résolution du problème implique donc une description approfondie des impacts et des calculs numériques assez lourds. On peut penser que le ruissellement du liquide va tout d'abord limiter l'épaisseur de la couche ; les températures continuant à croître, la couche solide va fondre jusqu'à sa complète disparition lorsque la température de paroi atteint la température de fusion. Il est donc probable que la couche condensée n'augmente pas dans des proportions importantes par rapport à sa valeur Δ_s et que, par conséquent la perturbation apportée par cette couche sur le calcul du flux et de la température de paroi reste modérée.

Les équations peuvent être également établies dans le cas d'une couche

entièrement liquide $(\Theta_p > \Theta_\Delta)$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{a_p}}{\lambda_p\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{t_L}^{t} \frac{q(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \left(\frac{1}{h+fc} + \frac{\delta}{\lambda_L}\right) q = \Theta_c - \Theta_p + \sigma T_c^4 \left(\frac{1}{h+fc} + \frac{\delta}{\lambda_L}\right), \\ f = \dfrac{\rho_c}{6\mu_L} \dfrac{d}{dx}\left[3\delta^2\tau_p - 2\delta^3 \dfrac{dp}{dx}\right] \quad , \quad t \geq t_L \, ; \end{cases}$$

avec : $t = t_L \, , \quad \delta = \delta_L \, .$

Dans ce cas, la deuxième équation peut être intégrée :

$$3\delta^2\tau_p - 2\delta^3 \frac{dp}{dx} = \int_{x_0(t)}^{x} \frac{6\mu_L f}{\rho_c} dx,$$

$x_0(t)$ étant défini par $\delta = 0$.

x_0 ne peut être déterminée que par une étude complète de toute la couche condensée.

d) destruction de la couche condensée

La couche étant rapidement portée superficiellement à la température de fusion de l'alumine, celle-ci devrait couvrir théoriquement toute la surface de la tuyère, ce qui n'est pas réellement constaté (figure 26). Il existe donc un phénomène qui limite l'écoulement de l'alumine liquide dans certaines conditions ; ce phénomène est relatif à la stabilité de la couche liquide et a été assez largement étudié [73 à 76]. L'objectif est ici de connaître dans quelles conditions la couche liquide est instable et quel est le résultat de la destruction de cette couche.

Le mode d'établissement du critère de stabilité peut être rappelé brièvement. On suppose tout d'abord que l'équation de la surface est de la forme :

$$\bar{y} = \eta e^{\sigma t} \cos(kx - \omega t),$$

où k est le nombre d'onde donné (longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$) et ω et σ des constantes réelles que nous déterminerons. En considérant tout d'abord le cas d'une couche non visqueuse d'épaisseur infinie au contact d'un gaz non visqueux [74], on écrit les équations linéaires de continuité et de quantité de mouvement de la couche liquide qui doivent être intégrées avec deux conditions : l'une relative à une profondeur infinie et l'autre de nature cinématique à l'interface. Dans le gaz, on peut définir une perturbation de pression due aux variations d'interface ; il faut alors distinguer si l'écoulement est subsonique ou supersonique. Les expressions de σ et ω en fonction de k sont obtenues en écrivant l'équilibre de l'interface sous l'effet des forces de pression et de tension superficielle. Le calcul est ensuite étendu au cas d'une couche visqueuse, de profondeur finie, en tenant compte de la couche limite et des forces de volume.

En appliquant les résultats de Chang et Russel, on peut par exemple tracer en fonction du nombre de Mach la longueur d'onde caractérisant la limite de stabilité. On voit sur la figure 29 qu'au col de la tuyère toute perturbation dont la longueur d'onde est supérieure à 1 micron est amplifiée ; comme l'échelle des phénomènes dans un propulseur est toujours supérieure au micron, ne serait-ce que par le diamètre moyen des particules susceptibles de se déposer sur la couche liquide, on doit admettre que cette couche est naturellement instable.

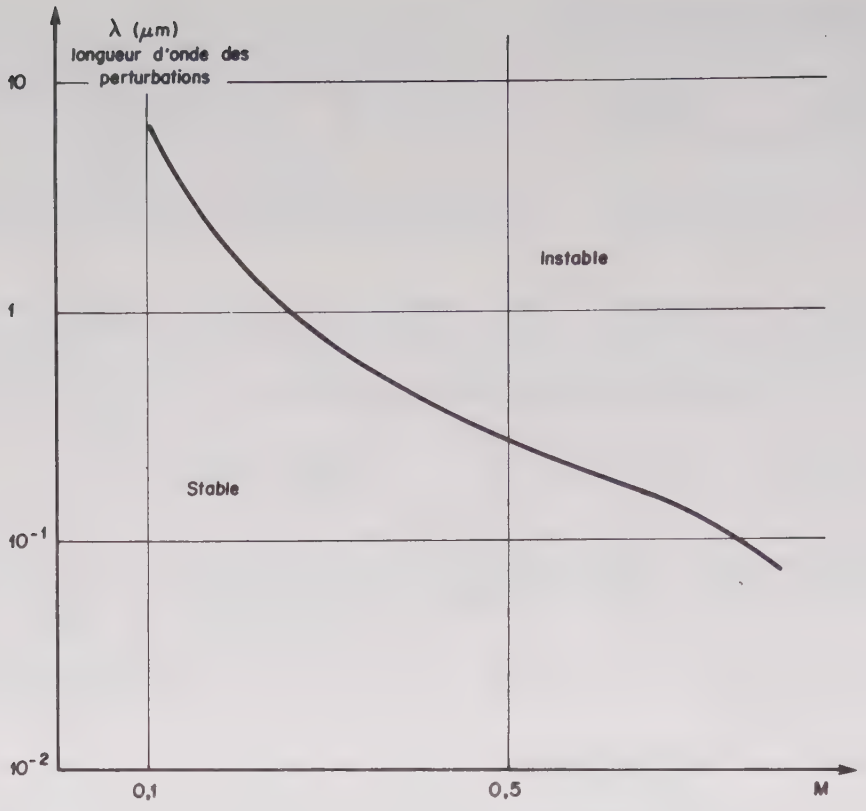


Fig. 29 - Stabilité de la couche limite.

Pour expliquer les divergences entre les deux résultats de la figure 26, il faut se souvenir que les impacts ont presque exclusivement lieu dans le convergent et que l'état physique de la couche dépend du transfert thermique. Pour la tuyère à très grand rayon de courbure du col, le coefficient d'échange $\bar{h}'$ reste modéré dans la région du col si bien que la température de surface n'atteint pas Θ_Δ au cours du tir ; l'alumine progresse dans ce cas par ruissellement sur la paroi mais elle s'y solidifie avant d'être détruite par l'instabilité ; l'alumine déposée sur le convergent passe le col par ce processus et peut ensuite s'accumuler sur la paroi relativement froide du divergent. Pour la tuyère à petit rayon de courbure du col, la valeur élevée du coefficient d'échange implique que la température de surface atteint très vite Θ_Δ , ce qui est bien vérifié expérimentalement par les mesures thermiques ; toute la couche atteignant le col est liquide, elle est détruite par les instabilités et ne se retrouve pas dans le convergent.

Les fragments de la couche liquide réinjectés dans l'écoulement vont reprendre une forme sphérique à moins que leur diamètre soit trop grand pour que leur stabilité dans l'accélération soit assurée, auquel cas elles risquent de se désintégrer. La granulométrie des nouvelles particules formées est mal connue ; tout au plus peut-on citer les résultats de Sherman et Schetz [75] dans des conditions cependant assez éloignées de notre problème : le diamètre des particules observées s'étend jusqu'à 100 μm le diamètre moyen étant compris entre 20 et 30 μm, ce qui correspondrait approximativement à la longueur d'onde donnant la vitesse de croissance maximale de l'instabilité. En l'absence de renseignements plus précis, on admettra que l'ordre de grandeur mentionné s'applique aux particules d'alumine formées à partir de la couche condensée ; ces particules seront peu accélérées par l'écoulement ce qui justifie la définition d'une perte due aux impacts. Remarquons que des observations expérimentales laissent supposer que la destruction de la couche n'est peut être pas un phénomène entièrement continu : des films du jet montrent le passage, de temps en temps, de projections très brillantes et probablement formées d'alumine.

5,4. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES PHÉNOMÈNES DE PAROI

Les différents phénomènes qui interviennent dans les calculs précédents sont insuffisamment connus et la mesure apparaît comme un complément indispensable aux développements théoriques. Parmi les grandeurs que l'on peut chercher à déterminer par l'expérience se trouve tout d'abord l'épaisseur du dépôt d'alumine sur la paroi. Des essais ont été entrepris dans ce sens en éteignant un propulseur après différents temps de fonctionnement ; l'extinction par détente est un phénomène brutal, l'adhérence de la couche n'est pas parfaite et le refroidissement rapide de la tuyère entraîne souvent un décollement et une fragmentation de la couche solidifiée si bien que l'exploitation de ces essais est assez délicate. On ne possède donc encore aujourd'hui que des informations qualitatives fragmentaires ; pour les conditions de fonctionnement retenues, caractérisés par un type de propergol, de propulseur et de tuyère (géométrie et matériaux), la couche d'alumine apparaît très rapidement au col de la tuyère puis ne subsiste que dans la zone d'entrée du convergent. Des essais sur un montage de simulation pour préciser l'instabilité d'une couche liquide au col d'une tuyère ont également été entrepris mais n'ont pas encore débouché sur des résultats pratiques ; on pourrait au cours de ces essais étudier la granulométrie des gouttelettes formées par désintégration de la couche liquide.

La mesure de la température ou du flux thermique de paroi, grandeurs qui sont liées par la conduction dans le matériau, est plus classique. Ces mesures ont été faites souvent pour la chambre ou la tuyère de moteurs fusées à propergol liquide [67] mais elles sont beaucoup plus rares pour les propergols solides métallisés ; ce fait tient à ce que les problèmes technologiques sont dans le dernier cas plus difficiles (températures plus élevées) et que le problème des protections thermiques ne se pose pas de la même façon (utilisation de matériaux ablatifs). L'utilisation de tuyères métalliques spéciales adaptées à ces mesures permet de déterminer le coefficient global de transfert de chaleur des produits de combustion à la tuyère [3, 71] mais on peut se demander si la couche condensée va s'y développer comme dans la réalité. Nous avons donc choisi d'utiliser des fluxmètres intégrés dans la tuyère réelle, donnant une mesure locale et perturbant peu le fonctionnement du propulseur.

Les exigences auxquelles doit répondre le fluxmètre sont sévères : très court temps de réponse (montée de 0 à 1000°C en moins de 0,1 s, à l'allumage du propulseur), tenue à haute température (2000°C) et sous des densités de flux très intenses (de l'ordre de 10^4 kW/m^2), dimensions réduites afin de perturber le moins possible la conduction dans la tuyère et de pouvoir être intégré dans des tuyères elles-mêmes petites. Le type de fluxmètre retenu est donc celui fonctionnant suivant le principe du puits de chaleur ; on mesure en réalité la température ou un phénomène lié à la température et on remonte à l'aide des équations de la conduction dans le solide au flux de paroi. Des sondes thermométriques à film de platine [77, 78], développés pour des problèmes assez proches, ont été utilisées, sans succès du fait de leur tenue insuffisante. Un matériel spécialement adapté a donc dû être développé.

Les fluxmètres mis au point et essayés se présentent approximativement sous la forme d'un cylindre de 4 mm de diamètre et 13 mm de long, réalisé en graphite c'est-à-dire dans le matériau même de la tuyère (grade 58-90 de Carbone-Lorraine). Les deux types de fluxmètres successivement étudiés ne diffèrent que par la mesure de la température. Dans le premier type (figure 30), la température est mesurée à deux distances de la paroi par des thermocouples de faible diamètre (thermocouples

Chromel-Alumel sous gaine d'acier inoxydable de 0,5 mm de diamètre du type Philipps Thermocoax). La conduction n'est que peu perturbée par la disposition longitudinale des deux thermocouples, les conductibilités thermiques du graphite et des métaux étant du même ordre de grandeur. La position très précise de la soudure chaude des thermocouples est déterminée après que le fluxmètre soit entièrement terminé par une photographie aux rayons X . Ce type de fluxmètre s'est avéré à l'usage comporter deux inconvénients majeurs : d'une part, il implique une méthode de dépouillement assez imprécise puisqu'il faut remonter de la température aux points mesurés à la température de paroi, c'est-à-dire extrapoler dans une zone où le gradient thermique est particulièrement intense ; d'autre part, il est limité en température (1200°C) par la destruction des couples Chromel Alumel. L'utilisation de couples plus résistants, Platine, Platine-rhodié par exemple, ne pourra être envisagée que lorsque ces couples seront disponibles sous gaine pour les plus faibles diamètres. Il faut cependant remarquer que ce type de fluxmètre est le seul qui puisse être utilisé dans le cas d'une érosion de la paroi et en particulier au col de la tuyère, sous réserve que le déplacement de la paroi puisse être prévu par ailleurs.

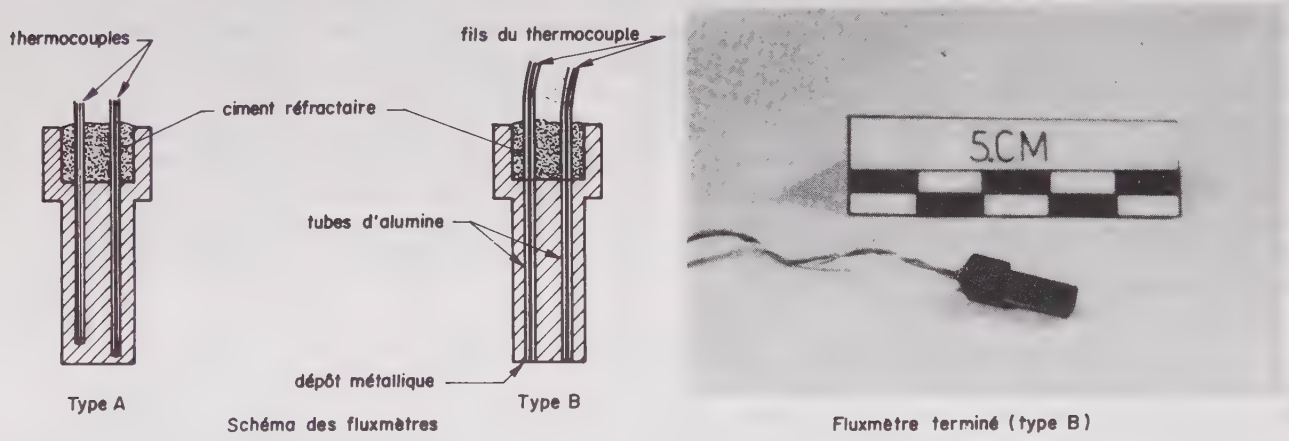


Fig. 30 - Fluxmètres disposés sur la tuyère.

Le second type de fluxmètre vise à déterminer directement la température de surface en réalisant la soudure chaude d'un thermocouple par un très fin dépôt métallique de surface. Pour permettre un fonctionnement à très haute température, le couple tungstène rhénium 5 % - tungstène rhénium 26 % a été retenu. Les deux fils sont isolés par des tubes d'alumine eux-mêmes encastrés dans le graphite. C'est la réalisation du dépôt de tungstène qui s'est avérée la plus délicate ; plusieurs méthodes ont été essayées : dépôt de métal fondu à l'aide d'un jet de plasma, dépôt en phase vapeur, pulvérisation cathodique. La dernière méthode a donné des résultats très encourageants puisque pour un dépôt de 8 μ, un temps total de fonctionnement supérieur à 8 s a pu être obtenu ; toutefois la technique semble encore insuffisamment maîtrisée pour conduire à des résultats bien reproductibles au point de vue adhérence. Une fois ces difficultés aplanies, ce type de fluxmètre devrait permettre un gain de précision important par rapport au type précédent.

La précision finale des résultats n'est pas seulement due aux mesures mais également à la méthode de dépouillement qui s'avère ici délicate en raison des grands écarts de température rencontrés au cours d'un essai. Ces écarts se traduisent par une variation notable (de 1 à 5) des propriétés thermiques du graphite, conductibilité thermique en particulier. Le problème thermique de conduction dans le matériau est donc non linéaire ce qui impose le recours soit au calcul numérique soit aux méthodes de calcul approchées.

Le calcul numérique doit être utilisé pour la détermination de la densité de flux lorsque la température de surface est imposée. Pour la conduction non linéaire unidimensionnelle, un schéma de calcul par différences finies du type

explicite peut être développé ; le critère de stabilité est alors donné par la relation [79] :

$$a_p \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Le programme correspondant n'a pas encore été développé ; il le sera dès qu'auront été surmontés les problèmes technologiques liés à la réalisation du fluxmètre et qu'auront été précisées les propriétés thermiques du matériau sur un intervalle de température suffisant.

Des méthodes de calcul approchées ont été mises au point pour le dépouillement des mesures réalisées par les deux types de fluxmètre. On trouvera dans la référence [80] un rappel de toutes les méthodes analytiques développées dans le cadre des problèmes instationnaires de conduction non linéaire. Les deux méthodes développées reposent toutes les deux sur une représentation algébrique de la température.

La première méthode est une adaptation, au problème lié au second type de fluxmètre, des méthodes variationnelles établies par Biot [81] et étendues au cas des propriétés thermiques variables [82]. Le problème mathématique peut être ramené à la recherche de la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2} = \frac{1}{A(\Lambda)} \frac{\partial \Lambda}{\partial t^*} ,$$

où

$$\Lambda = \frac{\int_{T_R}^{T} \lambda(T)\, dT}{\lambda_R T_R} ,$$

$$A = \frac{a(\Lambda)}{a_R(0)} ,$$

$$X = \frac{x}{L} , \quad t^* = \frac{t a_R}{L^2} ,$$

et avec les conditions limites :

$$t^* = 0 , \quad \Lambda \equiv 0 \quad \forall x ,$$

$$t^* > 0 , \quad x = 0 , \quad \Lambda = \Lambda_p .$$

Supposons que Λ est de la forme :

$$\Lambda = \Lambda_p \left(1 - \frac{x}{p}\right)^n , \quad x \leq p , \quad n \geq 2 ,$$

où p représente ici l'épaisseur de pénétration thermique. On établit que p est défini par l'équation différentielle :

$$p \frac{dp}{dt^*} I_1(\Lambda_p) + \frac{p^2}{n} \frac{1}{\Lambda_p} \frac{d\Lambda_p}{dt^*} I_2(\Lambda_p) = n I_3(\Lambda_p) ,$$

où

$$I_1(\Lambda_p) = \int_0^1 \tau^{1-\frac{1}{n}} \left[\int_0^\tau \frac{1-\tau^{\frac{1}{n}}}{A(\tau \Lambda_p)} d\tau \right] d\tau ,$$

$$I_2(\Lambda_p) = \int_0^1 \tau^{1-\frac{1}{n}} \left[\int_0^\tau \frac{1-\tau^{\frac{1}{n}}}{A(\tau \Lambda_p)} d\tau \right] \left[\int_0^\tau \frac{\tau^{\frac{1}{n}}}{A(\tau \Lambda_p)} d\tau \right] d\tau ,$$

$$I_3(\Lambda_p) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)(1-\tau^{\frac{1}{n}})}{A(\tau \Lambda_p)} d\tau .$$

Cette équation peut être intégrée compte tenu de la condition :

$$p = 0 \quad \text{pour} \quad t^* = 0 .$$

La solution explicite pour la densité de flux en est déduite :

$$q = \frac{n \Lambda_p}{\left\{ 2n \exp\left[+\frac{2}{n} \int_0^{\Lambda_p} \frac{I_2}{I_1} \frac{d\Lambda_p}{\Lambda_p} \right] \times \int_0^{+} \frac{I_2}{I_1} \exp\left[-\frac{2}{n} \int_0^{\Lambda_p} \frac{I_2}{I_1} \frac{d\Lambda_p}{\Lambda_p} \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Le problème initial est donc ramené à une suite de quadratures. En pratique, les calculs doivent être effectués à l'aide d'un programme numérique.

La seconde méthode correspond au problème lié au premier type de fluxmètre. Au voisinage de la paroi on représente Λ sous forme d'un développement polynomial tel que :

$$\Lambda = \alpha_0 + \alpha X_1 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3.$$

L'équation aux dérivées partielles est étendue au cas où la surface présente un rayon de courbure dont la valeur réduite est R* :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2} + \frac{1}{R^*} \frac{\partial \Lambda}{\partial X} = \frac{1}{A(\Lambda)} \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}.$$

Les coefficients α_0, α_1, α_2, α_3, sont déterminés à partir des quatre conditions suivantes :

$$\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_1^2 + \alpha_3 X_1^3 = \Lambda_1(\tau),$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 X_2 + \alpha_2 X_2^2 + \alpha_3 X_2^3 = \Lambda_2(\tau),$$

$$\frac{\alpha_1}{R^*} + 2\left(1 + \frac{X_1}{R^*}\right)\alpha_2 + 3\left(2X_1 + \frac{X_1^2}{R^*}\right)\alpha_3 = \frac{1}{A(\Lambda_1)}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}\right)_{X_1} = L_1(\tau),$$

$$\frac{\alpha_1}{R^*} + 2\left(1 + \frac{X_2}{R^*}\right)\alpha_2 + 3\left(2X_2 + \frac{X_2^2}{R^*}\right)\alpha_3 = \frac{1}{A(\Lambda_2)}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}\right)_{X_2} = L_2(\tau).$$

La résolution du système conduit à l'expression explicite des grandeurs recherchées en fonction des quantités mesurées Λ_1 et Λ_2 et des quantités déduites des précédentes, L_1 et L_2. On a par exemple :

$$\frac{qL}{\lambda_R T_R} = -\alpha_1 = -\frac{M_2 - M_1}{\Delta},$$

$$\Lambda_p = \alpha_0 = \frac{N_2 M_1 - N_1 M_2}{\Delta},$$

avec :

$$N_1 = \frac{X_1\left(12 + \frac{6X_2}{R^*} + \frac{3X_1X_2}{R^{*2}} - \frac{X_1^2}{R^{*2}}\right)}{6\left(2 + \frac{X_1+X_2}{R^*} + \frac{X_1X_2}{R^{*2}}\right)},$$

$$N_2 = \frac{X_2\left(12 + \frac{6X_1}{R^*} + \frac{3X_1X_2}{R^{*2}} - \frac{X_2^2}{R^{*2}}\right)}{6\left(2 + \frac{X_1+X_2}{R^*} + \frac{X_1X_2}{R^{*2}}\right)},$$

$$M_1 = \Lambda_1 - X_1^2 \frac{L_1\left(3X_2\left(2 + \frac{X_2}{R^*}\right) - 2X_1\left(1 + \frac{X_2}{R^*}\right)\right) - L_2X_1\left(4 + \frac{X_1}{R^*}\right)}{6(X_2 - X_1)\left(2 + \frac{X_1+X_2}{R^*} + \frac{X_1X_2}{R^{*2}}\right)},$$

$$M_2 = \Lambda_2 - X_2^2 \frac{L_1X_2\left(4 + \frac{X_2}{R^*}\right) - L_2\left(3X_1\left(2 + \frac{X_1}{R^*}\right) - 2X_2\left(1 + \frac{X_1}{R^*}\right)\right)}{6(X_2 - X_1)\left(2 + \frac{X_1+X_2}{R^*} + \frac{X_1X_2}{R^{*2}}\right)},$$

$$\Delta = \frac{(X_2 - X_1)\left[12 - \frac{(X_2-X_1)^2}{R^{*2}}\right]}{6\left(2 + \frac{X_1+X_2}{R^*} + \frac{X_1X_2}{R^{*2}}\right)}.$$

La figure 31 donne l'allure caractéristique des résultats obtenus par ces calculs pour une mesure faite dans le divergent afin de s'affranchir du problème de la couche condensée. Qualitativement la température de surface et la densité de flux évoluent bien comme le prévoit la théorie (figure 28), si l'on excepte toutefois la phase d'allumage. Par contre, le coefficient d'échange thermique ne se stabilise à une valeur constante qu'après un temps assez long; son ordre de grandeur est bien celui prévu par le calcul (figure 23), l'écart constaté pouvant provenir de différences dans la géométrie des tuyères utilisées.

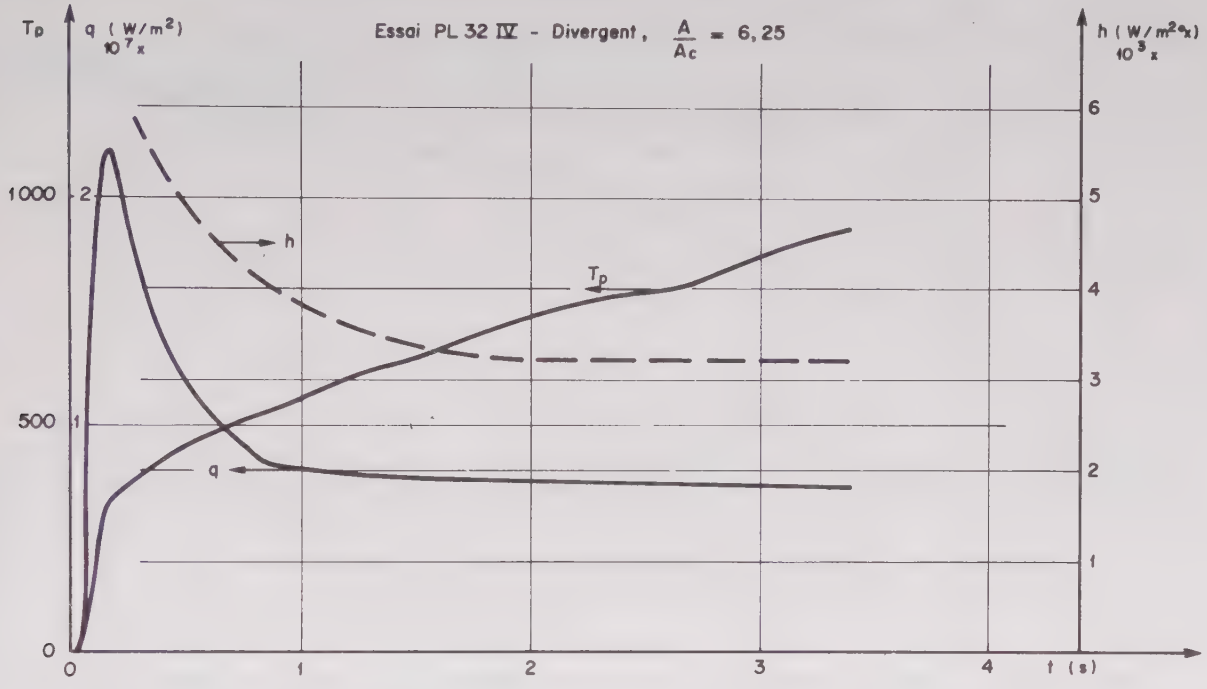


Fig. 31 - Résultats donnés par un fluxmètre du type B.

Des mesures de flux ont été réalisées de façon quasi systématique sur un grand nombre d'essais et il n'estpas possible de donner ici l'ensemble des résultats. Signalons seulement que, eu égard aux difficultés de fabrication rencontrées, le taux de fonctionnement des fluxmètres du type A ou du type B a été satisfaisant et que l'on s'emploie à l'améliorer. La précision des résultats obtenus est encore assez modeste et cette caractéristique est commune à toutes les mesures de cette nature,; les résultats sont en bon accord qualitatif avec la théorie quant à l'allure des courbes de densité de flux et de température encore que cette dernière se stabilise quelquefois après quelques secondes de fonctionnement. Le coefficient d'échange thermique équivalent $\bar{h}$, dans le convergent, décroît avec le temps, ce qui est conforme à l'augmentation de l'épaisseur de la couche condensée, comme le montre la formule :

$$\bar{h} = \frac{h'}{1 + \frac{\Delta}{\lambda_s} h'} .$$

L'épaisseur Δ , déduite par cette formule, de la valeur h' théorique et de la valeur $\bar{h}$ expérimentale est tout à fait comparable à celle déterminée expérimentalement ($\Delta \simeq 0{,}3$ mm). Notons enfin l'existence d'essais relatifs à la protection du convergent de la tuyère par un film gazeux fourni par un propergol non métallisé et donc relativement plus froid (2400°K au lieu de 3300°K) et qui confirment à la fois le bon fonctionnement des fluxmètres et l'interprétation correcte des phénomène ; le flux thermique est réduit au début du tir c'est-à-dire dans la phase la plus active de ce système, ainsi que l'indique la figure 32, et la couche déposée sur le convergent de la tuyère est beaucoup moins abondante.

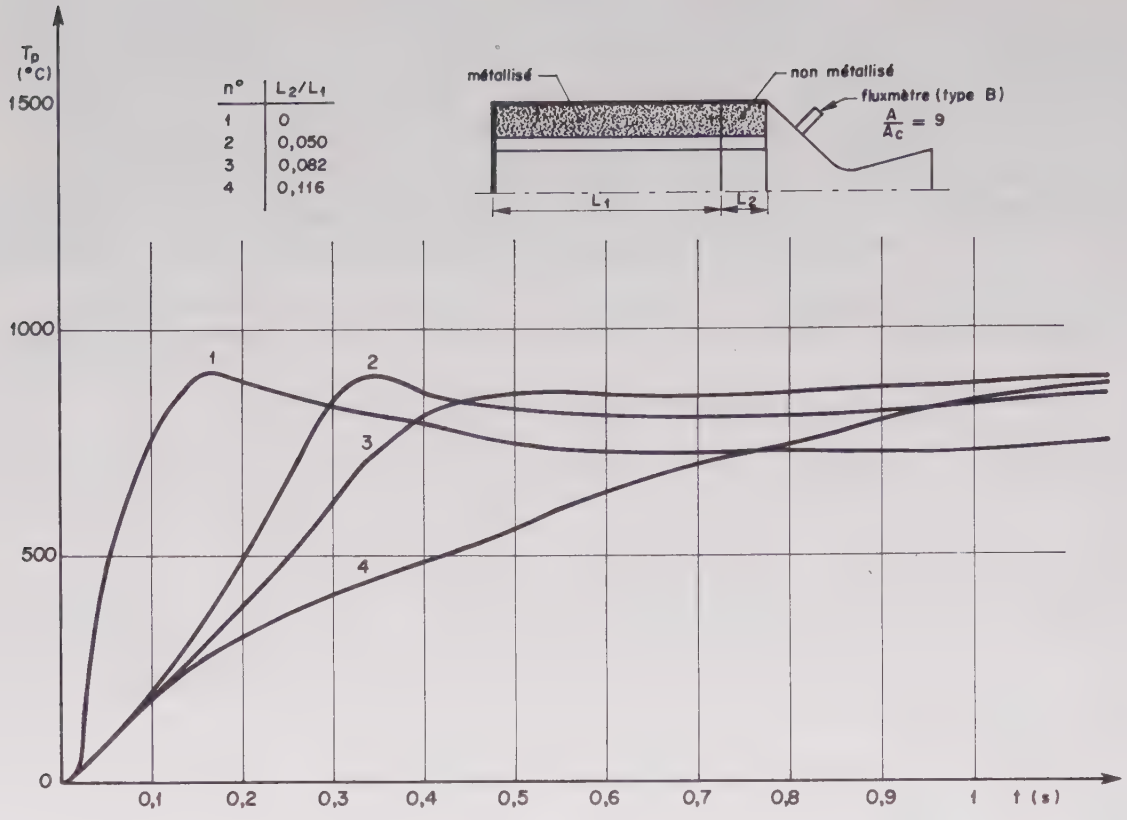


Fig. 32 - Montée en température d'une tuyère protégée par un film froid.

En résumé, l'étude expérimentale des phénomènes de paroi a nécessité le développement d'un matériel spécifique dont la mise au point s'est avérée délicate et doit se poursuivre. Bien que les résultats soient encore dispersés, ils sont toujours proches de ceux prévus par la théorie. Si l'on se rappelle que l'objectif de l'étude est ici de trouver la perte d'impulsion spécifique due aux phénomènes de paroi, perte qui ne dépasse en valeur relative quelques pour cent, cette simple constatation est dans une première étape suffisante car elle valide les calculs utilisés.

5,5. ESTIMATION DE LA PERTE D'IMPULSION SPÉCIFIQUE DUE AUX PHÉNOMÉNES DE PAROI

DUE AUX PHÉNOMÉNES DE PAROI

Les phénomènes de paroi étant en toute rigueur liés au problème de la couche condensée, il faudrait en principe étudier successivement les trajectoires des particules dans l'écoulement, les impacts des particules, compte tenu d'éventuels rebondissements et désagrégations, et les échanges de paroi couplés au développement de la couche condensée. On se contentera, en raison de la complexité du problème général, d'une approche simplifiée. On calcule à priori le coefficient d'échange thermique h' et la contrainte de frottement τ_p sans se préoccuper de la couche condensée. Les impacts se traduisent par des apports supplémentaires de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. La masse captée permet de définir une perte d'impulsion spécifique comme si la masse captée restait sur la tuyère ;

en réalité on sait qu'elle se trouve réinjectée dans l'écoulement sous forme de gouttelettes peu accélérées du fait de leur grosseur ce qui autorise l'interprétation précédente. Le développement de la couche condensée perturbe le flux transmis à la paroi et le frottement, mais cette couche est mal connue et on a montré que la perturbation est modérée tant que la couche est solide. On la négligera donc par la suite si bien qu'on se ramène au calcul de la perte d'impulsion due au frottement τ_p et au flux $\bar{q}$. En ce qui concerne cette dernière grandeur c'est une valeur moyenne $\overline{q}$ dépendant du temps de fonctionnement qu'il faut considérer, ainsi qu'il l'a été montré au paragraphe 5.3 a.

Les équations de l'écoulement unidimensionnel perturbé par le transfert thermique et le frottement de paroi s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{\rho}\,\overline{u}\,A = \dot{m}\ , \\ \overline{\rho}\,\overline{u}\,d\overline{u} + d\overline{p} = -\dfrac{\tau_p \cos\Theta}{A}\, dA_p\ , \\ d\overline{h} + \overline{u}\,d\overline{u} = -\dfrac{\overline{q}}{\dot{m}}\, dA_p\ , \\ \overline{p} = \overline{\rho}\, r\, \overline{T}\ . \end{cases}$$

L'aire A_p se rapporte à la surface latérale de la tuyère tandis que A est l'aire de la section droite ; Θ est l'angle que fait localement la méridienne avec l'axe de la tuyère si bien que :

$$\cos\Theta\, dA_p = 2\pi r\, dx\ .$$

Il est intéressant de transformer ces équations pour faire apparaître le caractère non adiabatique et non isentropique de l'écoulement.
L'équation de l'énergie donne :

$$\overline{h} + \frac{\overline{u}^2}{2} = -\frac{1}{\dot{m}} \int_0^x \overline{q}\, dA_p \simeq -\frac{1}{\dot{m}^{(e)}} \int_0^x \overline{q}\, dA_p = (\delta h)_a\ .$$

De l'équation de Gibbs pour un écoulement figé :

$$d\overline{h} = \overline{T}\, d\overline{s} + \frac{d\overline{p}}{\overline{\rho}}\ ,$$

on déduit, à l'aide des équations de l'énergie et de quantité de mouvement, l'expression :

$$d\overline{s} \simeq \frac{1}{T^{(e)}} \left[\frac{\tau_p \cos\Theta\, dA_p}{A \rho^{(e)}} - \frac{\overline{q}\, dA_p}{\dot{m}^{(e)}} \right]\ .$$

On forme donc :

$$(\delta s)_a = \frac{1}{\dot{m}^{(e)}} \int_0^x \frac{u^{(e)} \cos\Theta\, \tau_p - \overline{q}}{T^{(e)}}\, dA_p\ .$$

L'accroissement d'entropie est donc dû à la fois au transfert thermique et au frottement.

En faisant apparaître, comme au paragraphe 461, les écarts δu, δp, $\delta\rho$, δT par rapport au problème non perturbé, on se ramène au système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta u}{u^{(e)}} + \dfrac{\delta \rho}{\rho^{(e)}} = \dfrac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} , \\ C_{pf}^{(e)} \dfrac{\delta T}{T^{(e)}} - r \dfrac{\delta p}{p^{(e)}} = (\delta s)_a , \\ C_{pf}^{(e)} \delta T + u^{(e)} \delta u = (\delta h)_a , \\ \dfrac{\delta p}{p^{(e)}} - \dfrac{\delta \rho}{\rho^{(e)}} - \dfrac{\delta T}{T^{(e)}} = 0 . \end{cases}$$

La résolution de ce système par une méthode matricielle conduit aux solutions explicites suivantes :

$$\begin{cases} \delta u = - u^{(e)} \dfrac{\dfrac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} + \dfrac{(\delta s)_a}{r} - \dfrac{(\delta h)_a}{a_f^{(e)2}}}{\dfrac{u^{(e)2}}{a_f^{(e)2}} - 1} , \\ \delta p = \rho^{(e)} \dfrac{u^{(e)2} \dfrac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} + \dfrac{C_{pf}^{(e)} T^{(e)} + u^{(e)2}}{C_{pf}^{(e)}} (\delta s)_a - (\delta h)_a}{\dfrac{u^{(e)2}}{a_f^{(e)2}} - 1} , \\ \delta p = \rho^{(e)} \dfrac{\dfrac{u^{(e)2}}{a_f^{(e)2}} \dfrac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} + \dfrac{(\delta s)_a}{r} - \dfrac{(\delta h)_a}{a_f^{(e)2}}}{\dfrac{u^{(e)2}}{a_f^{(e)2}} - 1} , \\ \delta T = \dfrac{1}{C_{pf}^{(e)}} \cdot \dfrac{u^{(e)2} \dfrac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} + u^{(e)2} \dfrac{(\delta s)_a}{r} - (\delta h)_a}{\dfrac{u^{(e)2}}{a_f^{(e)2}} - 1} . \end{cases}$$

Le col géométrique ($u^{(e)} = a_f^{(e)}$) est un point singulier pour lequel les numérateurs des seconds membres s'annulent simultanément si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} + \frac{(\delta s)_a^*}{r} - \frac{(\delta h)_a^*}{a_f^{(e)2*}} = 0 .$$

Il vient donc :

$$\frac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} = - \frac{1}{\dot m^{(e)}} \left[\frac{1}{a_f^{(e)2*}} \int_0^{x^*} \bar q \, d A_p + \frac{1}{r} \int_0^{x^*} \frac{u^{(e)} \cos\theta \, \tau_p - \bar q}{T^{(e)}} d A_p \right] .$$

La variation relative de la vitesse caractéristique conventionnelle s'en déduit immédiatement :

$$\frac{\delta C^*}{C^*} = - \frac{\delta \dot m}{\dot m^{(e)}} = \frac{(\delta s)_a^*}{r} - \frac{(\delta h)_a^*}{a_f^{(e)2*}} .$$

Le frottement tend à augmenter la vitesse caractéristique de manière évidente. Quant à l'influence du flux thermique, elle est liée au signe de la quantité :

$$\frac{1}{a_f^{(e)2*}} - \frac{1}{r T^{(e)}} , \qquad \left(T^* \leq T^{(e)} \leq T_0^{(e)} \right) .$$

Compte tenu du domaine de variation de la température $T^{(e)}$, on peut établir :

$$-\frac{\gamma^*-1}{\gamma^* r T^*} < \frac{1}{a_f^{(e)2}} - \frac{1}{r T^{(e)}} < -\frac{(\gamma^*-1)(\gamma_0-1)+2(\gamma^*-\gamma_0)}{2(\gamma^*-1)\gamma_0 r T_0^{(e)}} .$$

Par conséquent, la vitesse caractéristique diminue avec le flux thermique et l'influence simultanée des phénomènes de paroi n'est pas connue à priori.

La perte d'impulsion spécifique est calculée comme au paragraphe 461 par rapport à un écoulement de référence adapté.
On obtient à nouveau :

$$\frac{\delta I}{I^{(e)}} = \frac{\delta u_s}{u_s^{(e)}} + \frac{\delta p_s}{p_s^{(e)} u_s^{(e)2}} .$$

En remplaçant δu_s et δp_s par leurs expressions, il vient :

$$\frac{\delta I}{I^{(e)}} = -\frac{1}{u_s^{(e)2}} \left(T_s^{(e)} (\delta s)_{as} - (\delta h)_{as} \right) ,$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{|\delta I|}{I^{(e)}} = \frac{1}{u_s^{(e)2} \dot{m}^{(e)}} \left[T_s^{(e)} \int_0^{x_s} \frac{u^{(e)} \cos\theta}{T^{(e)}} \tau_p \, dA_p + \int_0^{x_s} \left(1 - \frac{T_s^{(e)}}{T^{(e)}}\right) \bar{q} \, dA_p \right].}$$

Comme on pouvait s'y attendre, chacun des phénomènes de paroi apporte une contribution positive aux pertes d'impulsion spécifique.

6. PRÉVISION DES PERTES D'IMPULSION SPÉCIFIQUE

Nous nous proposons dans cette dernière partie d'appliquer les résultats précédemment établis à un cas concret et de comparer l'estimation ainsi obtenue de la perte totale d'impulsion spécifique à la valeur correspondante déterminée expérimentalement.

Les essais ont été réalisés avec un propulseur d'étude représenté schématiquement sur la figure 33. Les conditions de fonctionnement de référence choisies sont les suivantes :

- propergol :

  le propergol est un composite à liant polyuréthane et contenant 16,4 % d'aluminium. Il est utilisé sous forme d'une bloc cylindrique à perforation étoilée (type OLIVE de la SNPE), de diamètre extérieur 121 mm et de longueur 430 mm (pour un diamètre de col ϕ_c = 20 mm et une pression de chambre de 70 atm.).

- tuyère :

  la tuyère est entièrement en graphite et supportée par une virole métallique. Son profil est biconique avec un rayon de courbure constant au col ; le demi angle du convergent est 45°, celui du divergent est 15° et le rayon de courbure du col est égal au diamètre de la tuyère (soit 20 mm). Le rapport de section de sortie est de 9 ce qui assure approximativement l'adaptation de la tuyère pour une pression de chambre de 70 atm.

Tant par son échelle que par sa configuration, le propulseur n'est guère repésentatif des propulseurs de vol pour lesquels se pose le problème des pertes d'impulsion spécifique. On est contraint à une petite échelle pour des considérations financières évidentes ; l'utilisation d'une tuyère monobloc non intégrée résulte par contre d'un choix fait en vue de simplifier au maximum les phénomènes, en première analyse.

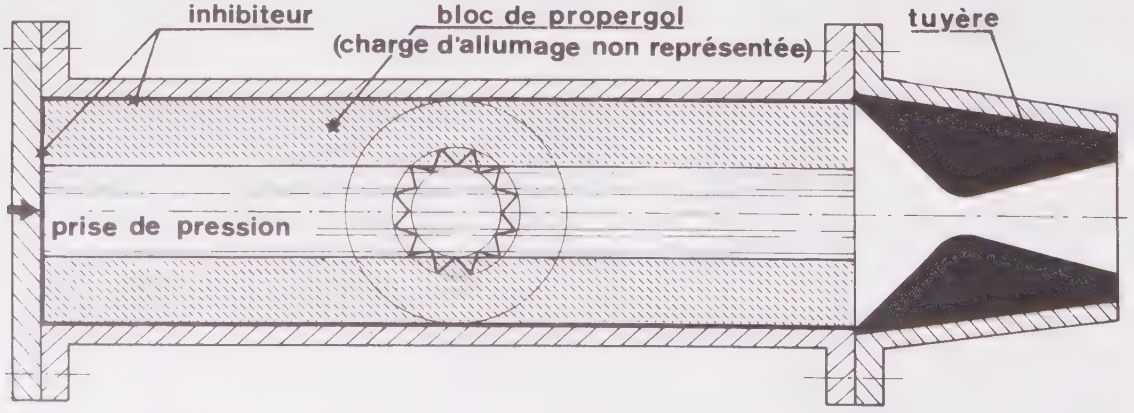


Fig. 33 - Propulseur pour l'étude des pertes d'impulsion spécifique.

6,1. ESTIMATIONS THÉORIQUES

Etant donné l'importance de la granulométrie de la phase condensée, il importe de partir de données assez sûres. Les valeurs retenues sont le résultat des nombreuses mesures réalisées par captation. Nous donnons les valeurs des principaux diamètres moyens à l'entrée de la tuyère et après solidification des particules, ces dernières valeurs étant beaucoup plus précises que les précédentes :

	entrée	sortie
d_{10} /µm	0,5	1
d_{30} /µm	0,6	1,3
d_{53} /µm	0,8	3,6

Chaque perte va être successivement calculée. Rappelons pour commencer que celle due à la combustion incomplète de l'aluminium est au plus de 0,4 %.

6,1.1. Perte due aux écarts entre phases

On cherche tout d'abord s'il est possible d'appliquer ici les formules du paragraphe 46. En proche équilibre, la condition à vérifier s'écrit approximativement au col géométrique :

$$\frac{2\overline{\tau_u}}{\overline{\gamma}+1}\sqrt{\frac{\overline{\gamma}\,\overline{r}\,T_o}{r_c R_c}} \ll 1 .$$

L'application numérique est faite avec les valeurs suivantes :

- $d_{53}^* = 1{,}9\,\mu m$, au col (les variations de d_{53} entre 0,8 et 3,6 µm sont déduites de la figure 17),
- $\rho_c = 2{,}17 \times 10^3\ kg/m^3$, (alumine liquide, d'après [83]),
- $\mu = 4{,}9 \times 10^{-5}\ kg/m\,s$),
- $\overline{\gamma} = 1{,}191$,
- $\overline{r} = 208{,}2\ J/kg\,°K$),
- $T_o = 3352\,°K$,
- $R_c = 2r_c = 2 \times 10^{-2}\ m$.

Il vient : $$\frac{2\overline{\tau_u}}{\gamma+1}\sqrt{\frac{\gamma r T_0}{r_c R_c}} = 0{,}52$$

Il apparaît donc que l'hypothèse du proche figeage n'est pas respectée pour notre petit propulseur ; notons que l'hypothèse commencerait à être valable à granulométrie constante, pour un diamètre de col supérieur à 100 mm. L'application de la formule proposée conduirait donc à surestimer fortement la perte due à la phase condensée (le calcul donne effectivement une valeur supérieure à 20 %).

La condition à vérifier pour la théorie du proche figeage est :

$$\frac{\left[2\int_0^x \frac{\overline{\tau_{u_0}}}{\overline{\tau_u}}\, u^{(e)}\, dx\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\overline{\tau_{u_0}}}\, u^{(e)}} \ll 1 .$$

Le calcul nécessite la connaissance de $u^{(e)}$ en fonction de x et la croissance des particules dans le cadre des mêmes hypothèses . $u^{(e)}$, vitesse locale des produits de combustion gazeux dans la tuyère, s'ils se détendaient seuls, n'est pas donnée par les programmes de calcul existants. Le calcul doit donc être repris comme indiqué dans la référence [84] pour une détente figée : les tables thermodynamiques JANAF et la composition à l'équilibre dans la chambre permettent de calculer l'entropie massique, l'enthalpie massique et la chaleur massique à pression constante, pour le mélange et chaque température ; l'hypothèse isentropique permet de relier température et pression, la conservation de l'énergie donne la vitesse en fonction de la température et un raisonnement sur le débit détermine le rapport de section. On néglige dans la formule précédente les variations de granulométrie dans la détente et on calcule $\overline{\tau_{u_0}}$ avec un diamètre moyen.

La valeur minimale du membre de gauche de l'inéquation, pour le plus grand diamètre moyen que l'on peut choisir est de 0,54. C'est dire que la théorie du proche figeage n'est pas applicable et que le régime du propulseur correspond à une relaxation moyenne entre phases qui rend nécessaire le calcul numérique.

Notons que le proche figeage nous fournit la limite supérieure de la perte biphasique. En effet, l'impulsion spécifique est toujours comprise entre la valeur correspondant à l'équilibre biphasique (programmes de calculs thermodynamiques) et celle correspondant à la détente des seuls produits gazeux (en considérant toute la masse de propergol brûlée). Si l'on convient de calculer la perte par rapport à l'équilibre biphasique (composition chimique figée), on constate qu'elle ne peut dépasser 35,7 %. Cette limite résulte de nombreuses différences dans les deux écoulements extrêmes ; l'écoulement "gazeux" est caractérisé par une légère inadaptation en sortie de tuyère, un exposant isentropique beaucoup plus élevé ($1{,}26 < \gamma < 1{,}32$ au lieu de $1{,}19 < \gamma < 1{,}21$) et surtout par le fait que la chaleur de solidification des particules n'est pas récupérée dans la détente ce qui explique que la perte maximale d'impulsion spécifique dépasse la perte maximale de débit.

Le développement d'un schéma de calcul réaliste devrait constituer la suite logique de l'examen détaillé des phénomènes physiques, qui constitue la plus grande partie de cette étude. La seule estimation de la perte d'impulsion spécifique due aux écarts entre phases qu'il est possible de donner, à ce stade, repose sur le modèle simplifié du paragraphe 451 qui a donné lieu à la mise au point d'un programme numérique. On ne peut, en raison de la faible représentativité du modèle simplifié, qu'espérer obtenir un ordre de grandeur. Pour choisir le diamètre moyen constant le plus représentatif, on s'est basé sur une série de calculs effectués, pour la théorie du proche équilibre, à la fois avec des particules solides et avec des particules liquides ; ce raisonnement nous conduit à

prendre $\bar{d} = 1{,}3$ µm. La perte ainsi calculée est :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(o)}}\right| \simeq 2{,}4\ \%$$

6,1.2. Perte due aux effets bidimensionnels

La perte due à la répartition non uniforme de la phase condensée dans les produits de combustion ne dépasse pas 0,4 %. Celle liée à la divergence du jet peut être calculée par la formule classique :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(o)}}\right| = \frac{1+\cos\alpha}{2} \simeq 1{,}7\ \%$$

6,1.3. Pertes de parois

La perte maximale due aux impacts des particules d'alumine sur le convergent est estimée à l'aide de la formule du paragraphe 52. Le calcul donne :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(o)}}\right| \leqslant 0{,}1\ \%$$

Cette perte est donc pratiquement négligeable. Elle correspond à une masse déposée sur la tuyère de l'ordre de 5 g : ce sont en moyenne les masses des dépôts mesurées après tir.

Les pertes dues au frottement et au flux thermique sur la tuyère sont obtenues grâce à la formule du paragraphe 5.5. La contribution du frottement se met sous la forme réduite :

$$\left|\frac{\delta I}{I^{(o)}}\right| = \frac{T_o}{T_o}\left(\frac{u_o}{u_R}\right)^{-2}\int_0^{\frac{x_o}{r_c}}\left(\frac{T}{T_o}\right)^{-1}\frac{u}{u_R}\,\frac{r}{r_c}\,\tau^*\,d\left(\frac{x}{r_c}\right),$$

où u_R est une vitesse de référence et où τ^* est le frottement réduit donné par l'expression :

$$\tau^* = \frac{2\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{\tau_p}{p_o}.$$

τ_p est connu d'après la figure 23.

Le calcul donne pour la perte due au frottement : $\left|\frac{\delta I}{I^{(o)}}\right| = 1{,}7\ \%$.

La contribution du flux thermique s'exprime par :

$$\frac{|\delta I|}{I^{(0)}} = \left(\frac{u_0}{u_R}\right)^{-2} \int_0^{\frac{\Delta_0}{r_c}} \left[1 - \frac{T_0}{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1}\right] \frac{r}{r_c}\, q^* d\left(\frac{\Delta}{r_c}\right) ,$$

où q^* est une densité de flux moyenne réduite donnée par :

$$q^* = \frac{\ell \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{\Gamma(\gamma)} \times \frac{\overline{q}}{P_0 u_R} .$$

Le coefficient d'échange h' est connu d'après la figure 23. On passe de h' à $\overline{q}$ par la formule déjà signalée :

$$\overline{q} = h' \Theta_i \, f\left(\sqrt{\frac{q_p h'^2 t_b}{\lambda_p^2}}\right) .$$

Il vient pour la perte due au flux thermique :

$$\frac{|\delta I|}{I^{(0)}} = 1\%$$

Récapitulons maintenant tous les résultats dans un tableau :

Origine de la perte	Perte	
Combustion	< 0,4 %	
Effets biphasiques de l'écoulement	2,4 %	
Effets bidimensionnels :		
- ségrégation de la phase condensée	< 0,4 %	
- divergence du jet	1,7 %	
Parois :		
- impacts	< 0,1 %	
- frottement	1,7 %	2,7 %
- flux thermique	1 %	

La perte totale d'impulsion spécifique la plus probable est voisine de 6,8 %. La précision de ce résultat est limitée par l'imprécision des données relatives à la granulométrie de la phase condensée et aux couches limites de tuyère ; elle ne saurait dépasser 10 %.

Les pertes les plus importantes sont, pour l'application donnée et par ordre décroissant :

- les pertes de paroi.

- les pertes dues à la présence de la phase condensée dans l'écoulement.

- la perte due à la divergence du jet.

Cette dernière peut être fortement diminuée par l'adoption d'un divergent profilé ; dans ce cas et en l'absence d'effets biphasiques, on retrouve bien l'ordre de grandeur des pertes minimales d'un propergol non métallisé.

Il existe peu de résultats dans la littérature auxquels cette décomposition des pertes puisse être comparée. Les travaux de Kliegel et Nickerson ont

porté sur des tuyères de 67 mm de diamètre mais pratiquement sans divergent. Les résultats de Miller et Barrington [85] dans des conditions assez comparables :

$$\beta = 60°,\ \alpha = 19{,}6°,\ R_c = r_c,\ p_o = 660\ \text{psia},\ \frac{A_t}{A_c} = 46{,}8,$$

semblent indiquer une surestimation importante des effets biphasiques (plus de 6%), au détriment toutefois des pertes de paroi (moins de 1 %) ; en ce qui concerne l'effet de la phase condensée, il est calculé avec un diamètre de particule constant et des valeurs de ce diamètre résultant de captations et ne peut donc prétendre à une bonne précision. Des tentatives récentes faites en France chez divers constructeurs ont des défauts similaires.

6,2. COMPARAISON DES ESTIMATIONS THÉORIQUES ET DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Par la mesure de la poussée et de la masse de propergol consommée, on détermine au banc une impulsion spécifique moyenne et on doit comparer ce résultat avec les valeurs théoriques. Deux problèmes principaux apparaissent à ce niveau :

- d'une part, tandis que la théorie est établie dans des conditions bien déterminées (pression de fonctionnement, géométrie de la tuyère ...), l'expérience ne se déroule généralement pas dans les mêmes conditions idéales ; il faut en effet compter avec le fait que la pression de fonctionnement n'est pas rigoureusement constante en raison de la variation de la surface de combustion avec l'épaisseur brûlée et de l'érosion du col, et avec des phénomènes parasites tels que la combustion partielle de l'inhibiteur, par exemple,

- d'autre part, on cherche à connaître l'influence de divers paramètres de fonctionnement sur l'impulsion spécifique. Comme les écarts attendus ne représentent qu'un faible pourcentage de l'impulsion spécifique, on ne peut espérer les mettre en évidence que si la précision des mesures est excellente. En dépit des difficultés inhérentes aux mesures sur banc d'essai, la précision visée était de l'ordre de 1 ‰ soit un peu plus de 0,2 s sur l'impulsion spécifique. Comme les résultats le montreront, cet objectif a été presque atteint ; ce succès n'a pu être obtenu que par un choix méticuleux du matériel et des techniques de mesures et de dépouillement.

6,2.1. Matériel

Le banc de poussée proprement dit résulte de la modification d'un montage existant (propulseur PL32). Il est représenté schématiquement sur la figure 34 : le propulseur est suspendu à un bâti très rigide par un jeu de lames flexibles, sa poussée est transmise à un capteur dont l'étalonnage est assuré par un système physique.

Il est souhaitable dans ce type de montage d'utiliser des capteurs d'une grande raideur. La souplesse des lames de suspension ne doit pas être trop grande afin d'éviter à l'allumage du propulseur un régime vibratoire parasite peu amorti.

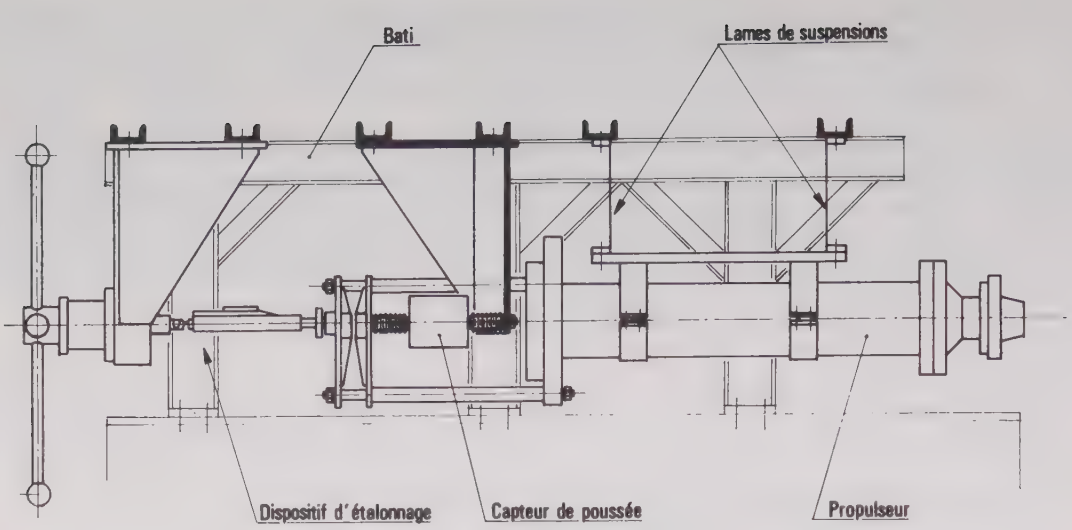


Fig. 34 - Schéma du banc de poussée.

Le capteur utilisé est un capteur à jauges de marque Baldwin-Lima-Hamilton. On doit veiller au parfait alignement de l'axe du propulseur et de celui du capteur ; en outre afin d'éviter la perturbation de la mesure par des couples parasites, la liaison du capteur avec le bâti, d'une part, et la pièce liée au propulseur, d'autre part, est assurée par articulations. Le montage est tel que le capteur est toujours légèrement précontraint.

Pour **l'étalonnage**, on a choisi un système physique. Un dispositif à vis et butée assure la mise en traction simultanée d'un anneau dynamométrique étalon et du capteur à jauges. L'étalonnage est, pour chaque essais, réalisé avant et après tir. L'hystérésis constatée à l'étalonnage est généralement faible. Le fond avant est équipé de prises de pression pouvant recevoir une grande variété de capteurs (capteurs à jauges C.E.C. en général).

Pour s'affranchir d'influences aléatoires, chaque série d'essais, relative à l'étude d'un paramètre, est réalisée dans un temps réduit c'est-à-dire dans les mêmes conditions climatiques. On peut au besoin, si la température extérieure est trop basse, maintenir la température du propulseur à 15°C par un ruban chauffant enroulé sur la virole principale et un système de thermo-régulation. Tous les blocs utilisés au cours d'une même série d'essais sont usinés dans des pains provenant d'une même coulée. Les conditions de fonctionnement, mis à part le paramètre étudié, sont maintenues aussi constantes que possible d'un tir à l'autre ; en particulier la tuyère est changée à chaque essai, la charge d'allumage est toujours la même et le propulseur est toujours nettoyé entre tirs.

On ne s'intéresse ici qu'aux principales caractéristiques de fonctionnement du propulseur à savoir pression et poussée. A la sortie des ponts de mesure, pour les capteurs à jauges, on dispose de signaux de tension représentatifs des phénomènes instantanés et d'excellente précision si les capteurs sont de bonne qualité. Le problème est de les enregistrer avec suffisamment de soin pour les exploiter ultérieurement. Cette question n'est pas indépendante de la méthode d'exploitation retenue dont nous parlerons par la suite.

Le point de vue adopté est le suivant : il faut restituer finement le phénomène mais il est inutile de descendre à des échelles de temps trop petites car apparaissent alors des fluctuations d'origine physique (inhomogénéité du propergol) ou électronique (bruit). Il suffit de pouvoir donner à intervalles de temps réguliers une mesure très précise représentant l'intégrale du signal sur ces intervalles c'est-à-dire la valeur moyenne à un facteur connu près.

Le traitement analogique du signal est limité au point de vue précision. C'est donc un traitement numérique qui a été choisi. La chaîne de mesure est schématisée sur la figure 35. Les premiers éléments en sont des convertisseurs tension fréquence (Hewlett-Packard 2212 A) qui délivrent des impulsions à une fréquence proportionnelle au niveau d'entrée ; ces convertisseurs travaillent autour du zéro et possèdent 3 gammes de mesures 1 V, 0,1 V et 0,01 V. Des compteurs numériques (Hewlett-Packard 5325 B) synchronisés donnent pour chaque intervalle de temps les nombres d'impulsions délivrés par les convertisseurs, nombres proportionnels à l'intégrale du signal sur l'intervalle de temps. Le temps de remise à zéro des compteurs est inférieur à 100 µs ; on peut donc le négliger sans faire une erreur supérieure à 10^{-3} s. Les intervalles de temps pratiquement jointifs, au temps de remise à zéro près, sont à choisir dans la gamme du compteur qui est du type multimètre universel ; ce choix est simple car en pratique on est limité par les performances de l'imprimante rapide Hewlett-Packard 5050 B (20 lignes par seconde à cadence maximale) : l'intervalle est de 0,1 s. Cette valeur permet une excellente restitution de la phase quasi permanente du tir mais n'autorise pas celle des phases transitoires (allumage, queue de poussée) ; on se sert alors d'un enregistrement graphique classique dont la précision est dans ce cas suffisante.

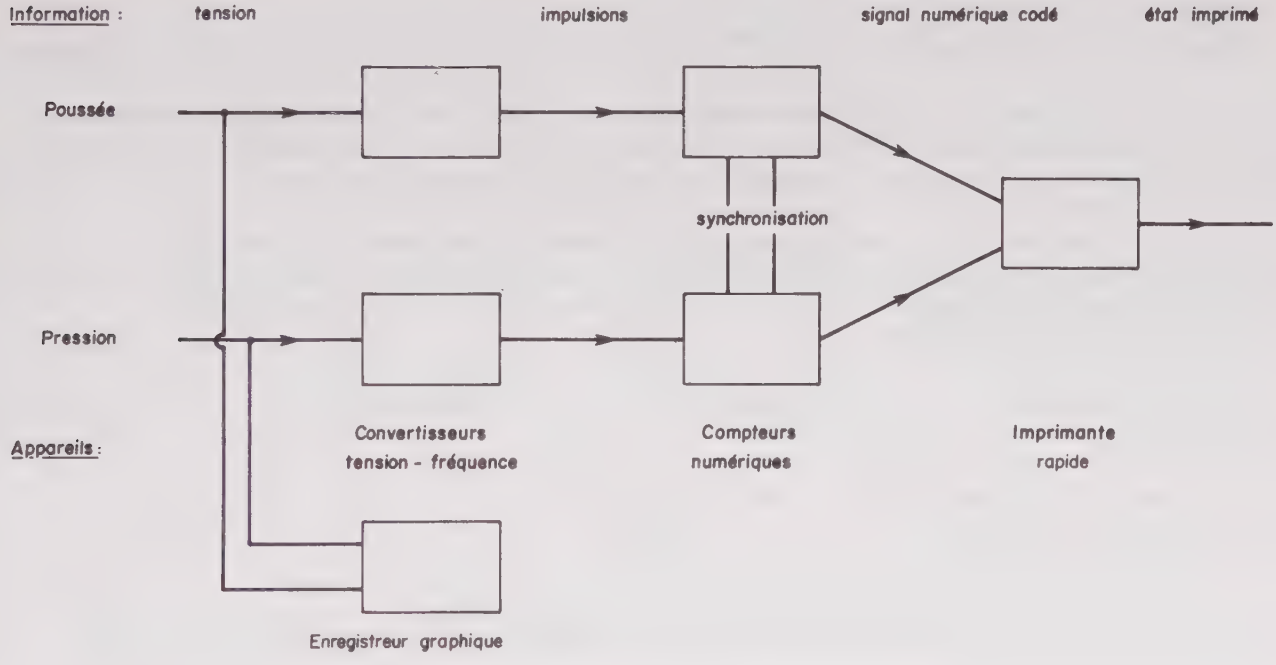


Fig. 35 - Schéma de la chaîne de mesure.

Les autres mesures nécessaires à la détermination des paramètres de performances sont :

- les mesures de masses; le bloc de propergol est pesé après usinage et après inhibage de sa face avant ; les masses de l'inhibiteur non brûlé après tir, des dépôts dans le propulseur ou sur la tuyère. de la tuyère avant et après tir sont également mesurées;
- les mesures du diamètre du col avant et après tir,
- les conditions atmosphériques (pression et température).

6,2.2. Méthode de dépouillement

Etant donnée la connaissance de l'évolution de la poussée et de la pression au cours de l'essai, le problème est maintenant de remonter à l'impulsion spécifique. Le dépouillement procède en plusieurs étapes dont la qualité va croissant :

a) dépouillement global

La première information sur l'impulsion spécifique est donnée par l'application en moyenne de la formule de définition. On écrit :

$$I \simeq \frac{(F)_{moyen}}{(\dot{m})_{moyen}\, g_0} = \frac{\int_0^{t_f} F\,dt}{\Delta m\, g_0} .$$

L'impulsion totale de poussée est calculée à partir des données enregistrées par l'imprimante par sommation, après d'éventuelles corrections pour tenir compte d'écarts de zéro ou de dérive (supposés linéaires dans le temps).

La masse Δm est la masse de propergol consommée. En réalité une partie de l'inhibiteur a été brûlée ; pour en tenir compte, on admet l'équivalence entre la masse d'inhibiteur brûlée et une masse moitié de propergol [86]. On calcule donc successivement :

- pour un bloc donné, les masses du propergol et de l'inhibiteur (inhibiteur latéral et inhibiteur de la face avant),
- la masse d'inhibiteur brûlée au cours du tir,
- la masse équivalente de propergol consommée.

La vitesse caractéristique est également donnée en première approximation par la formule :

$$C^* \simeq \frac{(P_0 A_c)_{moyen}}{(\dot{m})_{moyen}} \simeq \int_0^{t_f} \frac{P_0\,dt \times \overline{A_c}}{\Delta m} .$$

On remarque qu'en raison de la méconnaissance de la variation dans le temps du diamètre du col, on est contraint de séparer les termes P_0 et A_c. L'impulsion totale de pression est déterminée par sommation, après corrections, des données imprimées et la section moyenne du col est calculée à partir de la moyenne arithmétique des diamètres avant et après tir.

Les premiers résultats bruts I et C* correspondent à des conditions de fonctionnement moyennes et une correction est nécessaire pour les ramener aux conditions de fonctionnement théoriques. Le premier problème qui se pose est alors de définir un temps moyen de combustion et une pression relative moyenne de fonctionnement. Ces deux grandeurs sont liées par :

$$\overline{P_{0\,rel.}} \times \overline{F} = \int_0^{t_f} P_{0\,rel}\,dt .$$

Il existe un certain arbitraire quant au calcul de ces valeurs moyennes. Différentes conventions peuvent être adoptées [85] ; en France, la Commission d'Etude des Poudres et Explosifs a standardisé la définition des paramètres d'autopropulsion ; la norme retenue revient à déterminer $\overline{t}$ comme l'intervalle de temps entre les passages de la courbe à $\frac{\overline{P_o}_{rel}}{2}$.

$\overline{P_o}$ étant ainsi calculée, la pression atmosphérique P_A étant connue, on ramène I et C* aux conditions idéales (P_{oR} et P_{AR}) par des formules dont les coefficients sont déduits des calculs thermodynamiques. On établit ainsi :

$$I_1 = (I)_{corrigé} = \frac{I + \frac{v_s C^*}{g_o} \frac{P_A - P_{AR}}{\overline{P_o}}}{1 + (\alpha+\beta)(\overline{P_o} - P_{oR})} ,$$

$$C_1^* = (C^*)_{corrigé} = \frac{C^*}{1+\beta(\overline{P_o} - P_{oR})} .$$

On peut également calculer une valeur approchée de la vitesse de combustion à l'aide d'une épaisseur brûlée conventionnelle et du temps moyen $\overline{t}$; une correction de pression, basée sur un coefficient connu, permet de ramener v_b à la pression de référence.

b) dépouillement moyen en phase quasi permanente

Le dépouillement global fournit des informations rapides mais qui sont entachées d'une erreur systématique : dans les phases transitoires, une certaine masse de propergol est consommée mais elle contribue de manière peu efficace à la propulsion (pression basse, tuyère inadaptée). Dans ce second dépouillement, nous nous proposons de reprendre les calculs précédents mais en ne tenant compte que la portion de l'essai pour laquelle les grandeurs sont stabilisées. Le problème est alors de calculer la masse de propergol consommée pendant les phases transitoires.

Soient t_1 et t_2, les limites de la phase quasi permanente du tir ; ces temps sont à choisir en fonction des données de l'état imprimé. Pour l'allumage et comme la pression est rapidement variable (le temps de montée de 0 à 70 b est de l'ordre de 0,1 s), on a choisi d'utiliser la vitesse de combustion du propergol comme donnée de base (v_b est déterminée en valeur relative par une courbe standard et en valeur absolue par le premier dépouillement). Au début de l'essai l'évolution de la surface de combustion est bien connue en fonction de l'épaisseur brûlée et on calcule le débit massique en tenant compte éventuellement d'effets érosifs dans le canal central. La masse consommée pendant l'allumage est prise égale à :

$$\delta m_1 = \int_0^{t_1 - \tau_s} \dot{m}\, dt ,$$

où τ_s est le temps de séjour dans la chambre au début du tir.

La queue de poussée est plus lente (le temps de descente de 70 b à 0 b est supérieur à 0,5 s). Le débit massique instantané est calculé à l'aide de la vitesse caractéristique donnée par le premier dépouillement et corrigé en fonction de la pression et le diamètre final de la tuyère : par intégration, on obtient :

$$\delta m_2 = \int_{t_2}^{t_f} \dot{m}\, dt .$$

La masse de propergol à prendre en considération est donc ici :

$$\Delta m' = \Delta m - (\delta m_1 + \delta m_2) .$$

Le dépouillement se fait comme en a) ; le temps est cependant ici parfaitement connu si bien que la correction est plus significative. Ces secondes valeurs de l'impulsion spécifique et de la vitesse caractéristique seront notées I_2 et C^*_2.

c) dépouillement local

On peut être tenté de pousser plus loin les corrections et de les appliquer aux valeurs instantanées. L'expression théorique de la poussée est :

$$F = \dot{m} v_s + A_s (p_s - p_A) .$$

Une première correction consiste à calculer la poussée dans le cas où la pression atmosphérique serait standard :

$$F^* = F - A_s (p_{AR} - p_A)$$

Une seconde correction est due à l'inadaptation de la tuyère à la pression p_o instantanée. Cependant on sait que la poussée est maximale à l'adaptation c'est-à-dire pour une certaine valeur $\sigma_{sa}(p_o)$ du rapport de section de sortie de la tuyère ; comme en pratique, on ne s'éloigne jamais beaucoup de l'adaptation, on montre que la correction peut être négligée.

La dernière correction est due à l'écart entre p_o et la valeur de référence p_{oR}. Les formules de correction utilisées sont respectivement pour le coefficient de poussée et la vitesse caractéristique :

$$C_F(p_o) = C_F(p_{oR}) \left[1 + \alpha (p_o - p_{oR}) \right] ,$$

$$C^*(p_o) = C^*(p_{oR}) \left[1 + \beta (p_o - p_{oR}) \right] .$$

Les coefficients α et β sont donnés par les calculs thermodynamiques.

En posant :

$$\Delta p_o = p_o - p_{oR} ,$$

on peut donc écrire :

$$F^* = \dot{m} g_o I(p_o) = \dot{m} g_o I_R \left[1 + (\alpha + \beta) \Delta p_o \right] ,$$

ou :

$$I_R = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{F^*}{1 + (\alpha + \beta) \Delta p_o} dt}{\Delta m' g_o} .$$

Le calcul montre que cette troisième valeur de l'impulsion spécifique diffère très peu (moins de 0,2 s) de I_2 ; cette nouvelle détermination doit plutôt être considérée comme une vérification.

On a également :

$$\frac{F^*}{(1+\alpha A p_0)\, p_0 A_{c0}} = \frac{A_c}{A_{c0}} C_{FR} .$$

On détermine ainsi les variations dans le temps de la section du col ; on doit vérifier que $\frac{A_{cf}}{A_{c0}}$ correspond bien aux mesures effectuées avant et après tir et on calcule finalement C_{FR} puis C_R^* .

La figure 36 donne un exemple des diverses courbes que l'on peut tracer. Le premier dépouillement donne :

$$I_1 = 236{,}8 \text{ s} , \quad C_1^* = 1545 \text{ m/s}$$

Le second dépouillement conduit à :

$$I_2 = 237{,}8 \text{ s} , \quad C_2^* = 1553 \text{ m/s} .$$

On constate que I_2 est supérieure à I_1 de 1 seconde : en effet les phases transitoires correspondent à 4 % (allumage) et 5,1 % (queue de poussée) de la masse consommée mais seulement à 8,7 % de l'impulsion de poussée. Ce résultat est très général : pour tous les essais, les écarts relatifs constatés entre I_1 et I_2 s'échelonnent entre 0,4 et 1,2 %. Les valeurs expérimentales brutes ne doivent donc pas être utilisées sans précautions et une standardisation des méthodes de dépouillement est donc souhaitable.

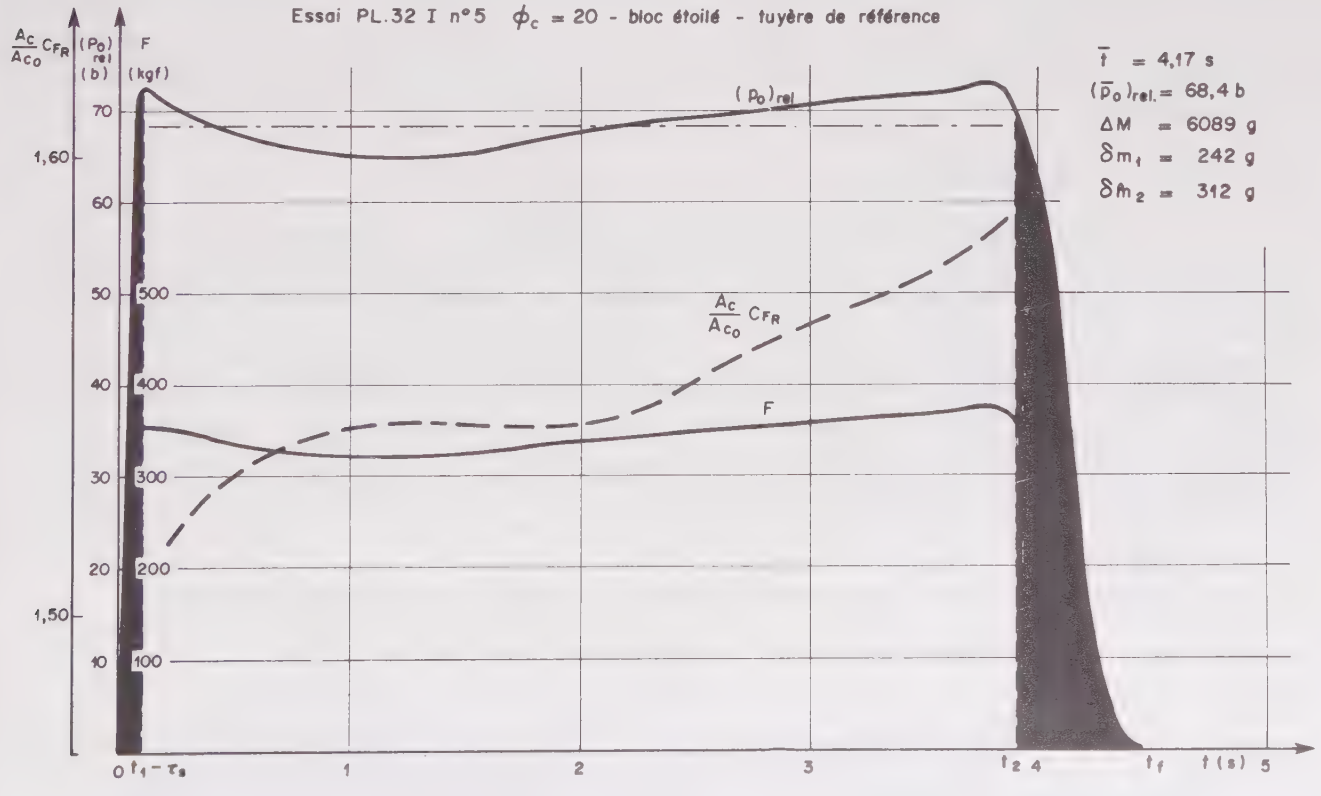


Fig. 36 - Exemple de dépouillement.

6,2.3. Résultats expérimentaux

On peut tout d'abord mentionner que la précision finalement obtenue est à peu près celle visée : l'écart maximal entre les impulsions spécifiques de deux essais réalisés dans des conditions identiques est de l'ordre de 2 ‰.

En ce qui concerne la perte globale d'impulsion spécifique, on a convenu de la calculer par rapport au calcul thermodynamique pour un écoulement chimiquement figé ; cette hypothèse semble la plus réaliste en raison de la petite taille du propulseur. On peut remarquer que le résultat dans l'hypothèse "figé au col" ne diffère du précédent que de 4 ‰ tandis que le résultat pour l'équilibre thermodynamique est supérieur de 1,7 %.

La moyenne des résultats expérimentaux dans les conditions de référence s'établit à :

$$I_R = 238{,}1 \text{ s} .$$

Elle correspond à une perte expérimentale de 7,4 %. Ce résultat ne diffère que très peu de l'estimation théorique (6,8 %) ; il laisse supposer que la perte due aux écarts entre phases a été sous estimée et qu'elle serait plutôt 3 % que 2,4 %.

Plusieurs séries d'essais ont été effectuées en vue de déterminer l'influence de différents paramètres de fonctionnement sur la perte d'impulsion spécifique. On ne s'est intéressé qu'à un seul propergol, une seule taille de propulseur, ($20 \text{ mm} \leqslant \phi_c \leqslant 22 \text{ mm}$), une pression de fonctionnement constante (70 atm, rapport de détente 70/1). On donne brièvement les résultats obtenus en ce qui concerne l'influence de la conception du chargement, de la géométrie de la zone d'entrée et de la tuyère.

a) conception du chargement

Pour assurer la neutralité de fonctionnement du propulseur c'est-à-dire une pression de chambre sensiblement constante, on réalise des perforations cylindriques étoilées ; les pains sont alors obtenus par coulée du propergol autour d'un noyau étoilé. Une nouvelle méthode de préparation du bloc consiste à partir d'une perforation cylindrique circulaire et à usiner au tour un certain nombre de gorges dans le propergol; une optimisation des éléments géométriques de cette gorge permet d'obtenir une neutralité satisfaisante. Cette technique est relativement souple mais la structure de l'écoulement dans la perforation est nettement plus complexe que dans le cas cylindrique ; aussi a-t-on cherché à vérifier si la perte d'impulsion spécifique n'en était pas affectée.

Les tuyères utilisées possédaient les caractéristiques suivantes :

$$\beta = 41°30' - \alpha = 18° - \phi_c = 22 - \frac{R_c}{r_c} = 1{,}36 .$$

Pour un bloc étoilé, la perte est : 7,9 %, alors que pour un bloc usiné on trouve 8,4 % ; l'écart constaté entre ces deux pertes est 0,5 % et il est significatif. Les dépouillements de granulométrie correspondants n'ont pas encore été effectués à ce jour.

Une autre conception de chargement visant à réduire les pertes de paroi a déjà été signalée (paragraphe 5.4 et figure 32). La figure 37 donne la varia-

tion de perte d'impulsion spécifique en fonction de la proportion de propergol non métallisé et métallisé (mêmes caractéristiques de tuyère que précédemment). La réduction de perte que l'on pourrait espérer par ce système est très faible et ne saurait compenser l'accroissement de complexité du propulseur. Aucune variation systématique de la granulométrie de la phase condensée n'a été constatée dans ce cas. Notons aussi que la variation de vitesse caractéristique peut être exprimée par une moyenne convenablement pondérée des vitesses caractéristiques théoriques des deux propergols, que le dépôt de tuyère est d'autant plus réduit que la protection est intense mais que l'érosion du col en est à peu près indépendante.

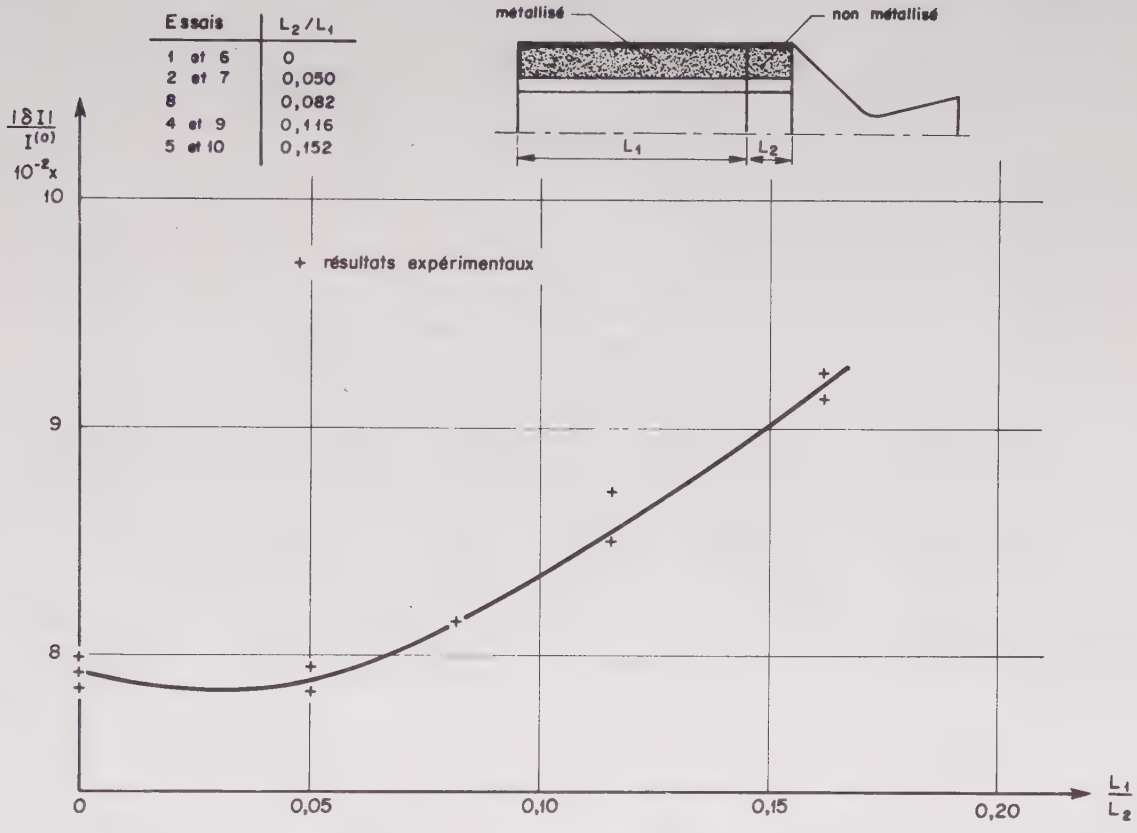


Fig. 37 - Réduction des pertes de paroi par un film froid.

b) géométrie de la zone d'entrée

La réduction des dimensions extérieures du propulseur peut être obtenue en utilisant des tuyères à rapport d'entrée très petit c'est-à-dire pratiquement sans convergent ou en disposant le convergent à l'intérieur même du propulseur, (tuyère "intégrée" ou "immergée"). L'existence d'une zone morte dans le premier cas, l'écoulement autour de la partie intégrée de la tuyère dans le second cas, peuvent être à l'origine de modifications de la phase condensée.

Les tuyères utilisées pour étudier le rapport d'entrée possédaient les caractéristiques communes suivantes :

$$\beta = 45° \cdot \alpha = 15° \cdot \Phi_c = 20 \cdot \frac{R_c}{r_c} = 2 \cdot$$

La figure 38 montre que l'effet du rapport d'entrée ne devient sensible qu'au dessous de la valeur $\frac{r_e}{r_c} = 4$. La perte d'impulsion spécifique supplémentaire pourrait dépasser 1 % pour les rapports d'entrée peu supérieurs à 1.

Les résultats relatifs à l'intégration de la tuyère ont été obtenus pour

une tuyère présentant les caractéristiques suivantes :

$$\beta = 41°30' - \alpha = 18° - \phi_c = 22 . \quad \frac{R_e}{r_c} = 1,36 . \quad \frac{r_e}{r_c} = 2,36 .$$

(longueur relative intégrée : $\frac{L_I}{L_P} = 0,094$).

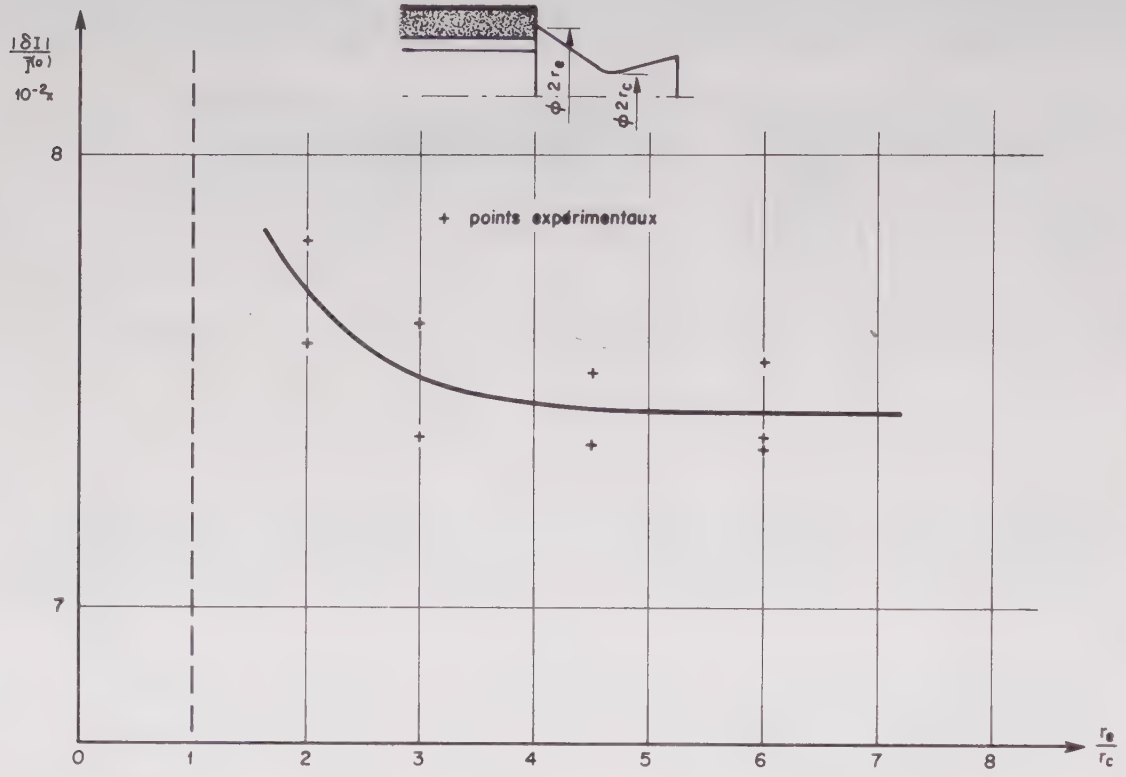


Fig. 38 - Influence du rapport de section d'entrée sur la perte d'impulsion spécifique.

La perte supplémentaire d'impulsion spécifique due à l'intégration, par rapport à celle d'une tuyère biconique de référence est de 1 %. On peut comparer ce résultat à celui de la formule proposée par Kordig et Fuller [87] et qui s'écrit avec nos notations :

$$\frac{|\delta I|}{I_s^{(0)}} = 0,74 \times 10^{-2} \times \frac{\varepsilon}{\pi_A} \times \left(\frac{L_I}{L_P}\right)^{0,38} \times \left(\frac{r_a}{r_c}\right)^{0,28} \times \left(\frac{r_e}{r_c}\right)^{-1,60} \times \left(\frac{P_0 L_P}{\mu C^*}\right)^{0,80}$$

L'application numérique conduit à :

$$\frac{|\delta I|}{I_s^{(0)}} = 0,5\% .$$

A cette valeur, il faut ajouter la perte supplémentaire due au faible rapport d'entrée soit 0,2 % (figure 39) ce qui donne au total 0,7 %. C'est bien l'ordre de grandeur obtenu expérimentalement.

Les mesures de granulométrie confirment que la perte supplémentaire est bien due à une action sur la phase condensée. Lorsque le rapport d'entrée varie de 6 à 2, les diamètres moyens augmentent de façon régulière ; on observe dans ce cas que d_{10} varie assez peu tandis que la variation de d_{53} dépasse 30 % ; cette différence est due à l'augmentation du nombre des grosses particules au fur et à mesure que $\frac{r_a}{r_c}$ diminue. L'augmentation des diamètres moyens pour l'intégra-

tion de la tuyère est plus uniforme, de 11 % pour d_{10} à 13 % pour d_{30} ; ces valeurs permettent de retrouver le supplément de perte d'impulsion spécifique si l'on admet que la perte est proportionnelle au carré d'un certain rayon moyen. Le mécanisme de croissance de la phase condensée apparaît assez différent en ce qui concerne l'influence respective du rapport d'entrée et de l'intégration de la tuyère.

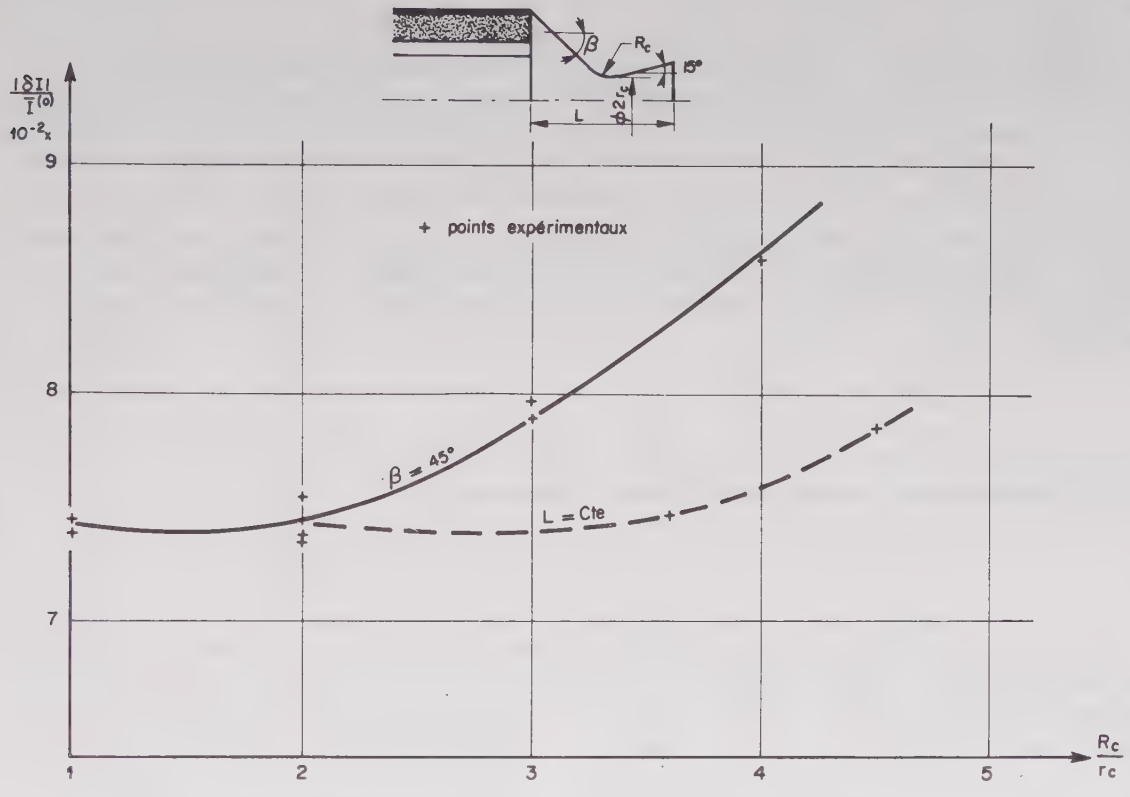


Fig. 39 - Influence de la géométrie de la tuyère sur la perte d'impulsion spécifique.

Dans le cas de l'intégration, les pertes thermiques sont probablement augmentées du fait de la conception même de la tuyère. On a cherché à protéger la tuyère par la méthode du film froid déjà mentionnée. Le gain obtenu pour $\frac{L_1}{L_2} = 0{,}082$ est de 2‰ c'est-à-dire à la limite de la signification ; l'influence sur la granulométrie n'est pas nette non plus.

c) géométrie de la tuyère

La conception du chargement et la géométrie de la zone d'entrée ont un rôle actif sur la granulométrie initiale et éventuellement sur la perte due aux impacts des particules sur la paroi, perte toujours très faible. La géométrie de la tuyère a par contre une influence directe sur les pertes les plus importantes : écarts entre phases, frottement et flux thermique de paroi et naturellement divergence du jet.

Les essais ont été limités à des tuyères biconiques, afin de réduire au maximum le nombre des paramètres géométriques. La première série d'essais est relative à des tuyères à rayon de courbure constant au col, un diamètre de col et un demi-angle de divergent constants (20 mm et 15°).

La figure 39 donne deux courbes. La première correspond à une longueur de tuyère constante et à une variation simultanée du demi-angle du convergent et du rayon de courbure du col. La seconde a trait à un demi-angle du convergent constant, l'augmentation du rayon de courbure du col impliquant l'augmentation de

la longueur de la tuyère. On constate que les tuyères courtes et les faibles rayons de courbure sont toujours préférables. L'accroissement de perte avec le rayon de courbure ne peut être lié à la phase condensée car aucune variation systématique de la granulométrie n'a pu être mise en évidence et les cols les plus progressifs réduisent les écarts entre phases ; il faut donc y voir une influence importante des pertes de paroi. La vitesse caractéristique varie peu à longueur de tuyère constante ; elle décroît par contre régulièrement lorsque le rayon de courbure du col augmente.

Dans la perspective de réduire les écarts entre phases au col, on a conduit quelques essais avec des tuyères identiques à la tuyère de référence au point de vue convergent, divergent et longueur totale mais possédant un col cylindrique de 4 mm raccordé par deux sections à rayon de courbure constante au convergent et au divergent au lieu d'un col à rayon de courbure constant ($\frac{R_c}{r_c} = 2$). L'écart relevé entre les deux séries d'essais est inférieur à 2 ‰ et n'est donc pas significatif. L'érosion du col est aussi marquée dans les deux cas ; le col cylindrique ne présente donc en définitive aucun avantage en ce qui concerne les performances.

6,2.4. Résultat de la comparaison théorie-expérience

L'analyse théorique du problème apparaît bonne car elle est bien confirmée par les résultats expérimentaux et ceci à la fois sur le plan qualitatif, en permettant d'expliquer l'accroissement des pertes dans certaines conditions, et sur le plan quantitatif. En ce qui concerne ce dernier point, la précision est encore limité d'une part par l'absence d'un schéma réaliste d'écoulement dans la tuyère et d'autre part par les données granulométriques de la phase condensée.

Une bonne connaissance de la phase condensée à l'entrée de la tuyère est indispensable; d'autres recherches sont nécessaires avant que la granulométrie puisse être prévue au stade de l'avant projet, non seulement en fonction de la pression de fonctionnement et de l'échelle du propulseur mais aussi suivant la conception du chargement et de la zone d'entrée de la tuyère.

6,3. POSSIBILITÉS DE RÉDUCTION DES PERTES

Le problème auquel nous allons maintenant nous intéresser est relatif à l'optimisation du propulseur c'est-à-dire au choix des paramètres de fonctionnement qui permettent de réduire au maximum les pertes. Toute optimisation se fait dans le cadre de certaines contraintes : nous supposerons le propulseur bien défini quant à ses dimensions principales; la nature du propergol, la pression de fonctionnement et le diamètre du col sont donnés. L'action peut être menée sur la composition du propergol ou sur les caractéristiques géométriques du propulseur.

6,3.1. Action sur le propergol

Il faut noter tout d'abord que l'optimum pratique de la teneur en métal du propergol se trouve toujours en deçà de la valeur donnée par les calculs thermodynamiques ; du fait que les pertes liées à la phase condensée dépendent à la fois de la teneur en métal et de la taille du propulseur, l'écart entre optimum théorique et optimum pratique dépend de l'application envisagée. Cet écart peut atteindre 5 % pour les petits propulseurs.

Le niveau de performance étant fixé, on peut diminuer les pertes en réduisant soit la proportion de la phase condensée dans les produits de combustion, soit la granulométrie des particules. Pour diminuer la phase condensée en partant d'une teneur sensiblement constante en métal, on peut tout d'abord penser à former un maximum de composés volatils. Cet aspect du problème est lié au choix du métal ; un corps tel que le bore présenterait sous cet angle un certain avantage (température de vaporisation de l'oxyde de l'ordre de 2400°K), bien qu'il soit sur le plan énergétique assez peu favorable (formation de produits de forte masse molaire, quoique peu stables à haute température et de combustion difficile). Le choix du métal résulte donc d'un compromis. Pour l'utilisation de métaux difficiles à brûler, on pourrait essayer des mélanges métalliques [88]. Une autre voie pour réduire la phase condensée est d'ajouter au propergol un additif susceptible de produire des produits volatils ; les composés fluorés sont à cet égard intéressants (il peuvent également accélérer l'inflammation du propergol). Un exemple de l'action des produits fluorés a été fourni par les études de modulation. Le propergolde base est un propergol à liant polyuréthane contenant 16,4 % d'aluminium ; le fonctionnement de ce propergol avec une injection de CCl_2F_2 (proportion massique 10 %) réduit la teneur en métal à 14,8 %. La proportion de phase condensée dans la chambre à 70 atm. est par contre diminuée de 42 % si bien que la perte d'impulsion de 2,5 % due à l'injection ne doit plus être que de 1,2 % si l'on suppose que la perte due à la phase condensée est de l'ordre de 3 % pour le propergol de référence.

En raison de l'influence considérable de la taille des particules, il serait souhaitable de diminuer la proportion ou la dimension des grosses particules. D'après le mode de formation présumé de ces dernières, il y a intérêt à réduire la masse des particules d'aluminium entraînées par la phase gazeuse ; ceci pourrait être obtenu en évitant l'agglomération des particules d'aluminium liquides à la surface du propergol par un traitement de surface approprié. Il est d'autre part toujours souhaitable d'éviter l'oxydation superficielle des particules métalliques dans le propergol, ce qui peut être réalisé par un dépôt à la fabrication des particules [89] ; cette technique permettrait en outre d'utiliser le lithium qui est intéressant au point de vue énergétique.

6,3.2. Action sur le propulseur

Les premiers éléments d'une réponse ont été donnés par les essais et pourraient également être donnés par une étude paramétrique [57]. L'objectif sera ici de déterminer directement par le calcul la conception optimale du propulseur et le gain correspondant. L'influence de la conception du chargement et de la zone d'entrée se traduit par des modifications de la granulométrie de la phase condensée dans la section d'entrée de la tuyère. Cette influence est connue expérimentalement

mais aucun schéma théorique n'est pour l'instant capable de la prévoir ; on peut penser qualitativement qu'il y a intérêt à limiter les gradients de vitesse et à éviter les zones de survitesse, les mélanges de jets et tout dispositif susceptible d'accroître le niveau de turbulence dans la chambre. L'optimisation sera donc limitée ici à la tuyère.

a) influence relative des diverses zones de la tuyère

La perte due aux écarts entre phases souligne l'importance primordiale du divergent si l'on tient compte de la croissance des particules car c'est en sortie de tuyère que les particules sont les plus grosses. C'est ce que confirment les calculs effectués en proche équilibre avec la formule du paragraphe 4.6.1 pour des tuyères biconiques : la contribution du convergent à la perte est négligeable et celle du col est faible ; une part appréciable de la perte se produit durant la solidification de l'alumine dans le divergent.

Le rôle des diverses zones de la tuyère dans les pertes de paroi est assez complexe. Dans l'exemple retenu et pour la perte thermique, le divergent n'intervient que pour 25 % alors que pour la perte par frottement, il correspond à 94 %.

La perte par divergence du jet est directement liée au profil du divergent, et il existe des techniques classiques en fluide homogène pour choisir des profils plus intéressants que le profil conique [90, 91] ; le demi-angle maximal du profil ne doit pas dépasser une valeur limite calculable, sous peine de produire une focalisation des ondes de détente, défavorable du point de vue de la stabilité de l'écoulement. Il faut également veiller à ce que les particules ne puissent venir rencontrer la partie terminale de la tuyère [52].

Il apparaît donc que le divergent est la partie la plus importante de la tuyère et que l'écoulement doit être étudié d'un point de vue bidimensionnel.

La difficulté des calculs contraint à procéder par sous optimisations c'est-à-dire à ne considérer qu'une zone de la tuyère ou qu'un type de perte. L'optimisation du profil de la tuyère vis-à-vis des pertes de paroi est un problème qui n'a été que très peu abordé ; tout au plus sait-on que, pour une longueur constante de la partie subsonique de la tuyère, il y a intérêt à choisir un convergent concave correspondant à un rayon de courbure du col modéré [92]. Les travaux existants se décomposent en deux groupes : celui relatif à l'étude de la perte liée à phase condensée dans toute la tuyère et qui sont traités en écoulement monodimensionnel et celui relatif aux pertes dans le divergent prenant en compte la phase condensée et l'aspect bidimensionnel de l'écoulement.

b) optimisation de toute la tuyère pour la perte biphasique

Le premier résultat dans cette voie a été obtenu par Marble [93] pour le modèle d'écoulement biphasique simplifié (diamètre des particules constant et uniforme) et par application des méthodes du proche équilibre. Nous avons étendu les calculs d'une part en partant d'équations exactes et d'autre part, en proche équilibre, en considérant un écoulement plus réaliste.

Les méthodes analytiques d'optimisation sont assez nombreuses [91] ; parmi elles le calcul des variations a été appliqué avec succès à des problèmes de tuyère [95]. Nous avons choisi ici d'appliquer le principe du maximum (Pontryagin). Pour éviter des calculs trop difficiles, on n'a tenu compte que des écarts cinétiques entre phases ($p \equiv 1$) ce qui conduit à utiliser l'exposant isentropique du mélange à l'équilibre (noté simplement ici γ pour alléger l'écriture). Les équations réduites à utiliser sont donc :

$$\frac{dm}{dx} = -\frac{m\left(2m+\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\gamma}-m} F - \left(1+\frac{2\gamma}{\gamma-1}m+Km^2\right) K \left[\frac{1-n}{n}+(1+m)\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}n-1\right)\frac{1-n}{n}}{\frac{1}{\gamma}-m}\right],$$

$$\frac{dn}{dx} = - \frac{mn F}{\frac{1}{\gamma} - m} + \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right) \left[\frac{1-n}{n} - K n \frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} n - 1\right) \frac{1-n}{n}}{\frac{1}{\gamma} - m} \right].$$

Pour le problème optimal, la fonction de contrôle ne sera pas F mais une fonction auxiliaire susceptible d'éliminer la singularité des équations. La fonction choisie est liée aux variations de pression :

$$u = \overset{\circ}{f}(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Log} \frac{p_0}{p}\right).$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dx} = -m\left(2m + \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right) u + K\left(1 + \dfrac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[2m + \dfrac{\gamma-1}{\gamma}(1-n)\right] \dfrac{1-n}{n}, \\ \dfrac{dn}{dx} = -mn u + \left(1 + \dfrac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}} (1 + Kn) \dfrac{1-n}{n} \end{cases}$$

L'optimisation se fait ici à longueur de tuyère constante et à pression de sortie constante (tuyère adaptée). On montre alors que l'impulsion spécifique est proportionnelle à l'intégrale :

$$S = \int_0^{x_0} \frac{m}{\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}}} u \, dx .$$

En posant :

$$a_m = -m\left(2m + \frac{\gamma-1}{\gamma}\right),$$

$$a_n = -mn,$$

$$b_m = K\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[2m + \frac{\gamma-1}{\gamma}(1-n)\right] \frac{1-n}{n},$$

$$b_n = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}} (1 + Kn) \frac{1-n}{n},$$

$$g = \frac{m}{\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} m + K n^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

le problème peut être exposé sous la forme suivante :
étant donné le système :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{m} = a_m u + b_m, \\ \overset{\circ}{n} = a_n u + b_n, \\ \overset{\circ}{q} = u, \\ \overset{\circ}{s} = g u, \end{cases}$$

soumis aux conditions :

$$x = 0, \quad q(0) = s(0) = 0, \quad m(0), n(0) \text{ donnés},$$

$$x_0 \text{ et } q_0 \text{ donnés},$$

trouver le contrôle $u(x) \geq 0$ qui rend maximal $S(X_0)$."

On forme donc le système adjoint :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_m = -\lambda_m \left(\frac{\partial a_m}{\partial m} u + \frac{\partial b_m}{\partial m}\right) - \lambda_n \left(\frac{\partial a_n}{\partial m} u + \frac{\partial b_n}{\partial m}\right) - \lambda_s u \frac{\partial g}{\partial m}, \\ \dot{\lambda}_n = -\lambda_m \left(\frac{\partial a_m}{\partial n} u + \frac{\partial b_m}{\partial n}\right) - \lambda_n \left(\frac{\partial a_n}{\partial n} u + \frac{\partial b_n}{\partial n}\right) - \lambda_s u \frac{\partial g}{\partial n}, \\ \lambda_q = Cte \\ \lambda_s = Cte \end{cases}$$

Il doit satisfaire aux conditions :

$$\lambda_m(X_0) = 0,$$
$$\lambda_n(X_0) = 0,$$
$$\lambda_s = -1,$$
λ_q . indéterminé mais non nul .

L'hamiltonien s'écrit :

$$H = \lambda_m b_m + \lambda_n b_n + u(\lambda_m a_m + \lambda_n a_n - g + \lambda_q).$$

Le principe du maximum indique qu'en chaque point, H doit être minimal par rapport au contrôle. Or comme H est fonction linéaire de u, il faut imposer des contraintes sur le contrôle ; on prendra :

$$0 \leq u \leq u_{MAX} .$$

Le contrôle optimal se décompose donc en une suite d'arcs qui appartiennent aux trois catégoriés suivantes :

- arcs u_{MAX} si $\lambda_m a_m + \lambda_n a_n - g + \lambda_q < 0$,
- arcs 0 (pression constante) si $\lambda_m a_m + \lambda_n a_n - g + \lambda_q > 0$,
- arcs u variable si $\lambda_m a_m + \lambda_n a_n - g + \lambda_q = 0$.

Le calcul donne :

$$\frac{dH}{dx} = \dot{u}(\lambda_m a_m + \lambda_n a_n - g + \lambda_q) .$$

H est donc constant sur chacun des arcs ; comme le changement d'arc se fait par l'annulation du coefficient de $\dot{u}$ dans cette dernière équation, on peut conclure que H est continu et par conséquent constant sur tout l'intervalle.

A partir de ce résultat, on montre que le premier et le dernier arcs ne peuvent être que des arcs u_{MAX} et que l'arc intermédiaire est un arc u variable. Parmi toutes les solutions possibles, il existe la solution relative à u constant qui correspond à une croissance exponentielle de la pression, ce qui

confirme bien les résultats de Marble [93]. La forme de tuyère qu'on en déduit est connue : elle comporte un convergent court et convexe, un col long et un divergent très ouvert (profil en "trompette").

Le second type de calcul part de la formule établie en proche équilibre pour la perte d'impulsion spécifique :

$$\frac{|\delta I|}{I^{(\circ)}} = \varepsilon\, \overline{\tau_{u_0}}\, \frac{\overline{T_\Delta}^{(\circ)}}{\overline{u_\Delta}^{(\circ)2}} \int_{x_0}^{x_\Delta} q\, \frac{\rho_e}{\rho_{e_0}}\, \frac{\mu_0}{\mu}\, \frac{\overline{u}^{(\circ)}}{\overline{T}^{(\circ)}} \left(\frac{d\overline{u}^{(\circ)}}{dx}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2}\, \overline{\sigma}_{r_f}^{(0)} k^2\, \frac{\overline{u}^{(\circ)2}}{\overline{c_p}^{(\circ)}\overline{T}^{(\circ)}}\right] dx .$$

Dans cette formule, on admet que la fonction de croissance q dépend uniquement du rapport de section ou de $\overline{u}^{(\circ)}$. Des variables adimensionnelles peuvent être introduites [62] ce qui conduit à rendre minimale une intégrale de la forme :

$$J = \int_0^1 g(\overline{M}^{(\circ)}) \left(\frac{d\overline{M}^{(\circ)}}{dx}\right)^2 dx$$

L'optimisation se fera ici à longueur de tuyère constante et rapport de section de sortie donné ($\overline{M}_\Delta^{(\circ)}$ fixé).

L'équation d'Euler pour le problème extrêmal conduit à la solution :

$$g(\overline{M}^{(\circ)}) \left(\frac{d\overline{M}^{(\circ)}}{dx}\right)^2 = C .$$

Une fonction $H(\overline{M}^{(\circ)})$ peut être définie par :

$$H(\overline{M}^{(\circ)}) = \int_{\overline{M}_0^{(\circ)}}^{\overline{M}^{(\circ)}} \sqrt{g(\zeta)}\, d\zeta .$$

Dans les conditions du modèle simplifié, la fonction H s'exprime en termes d'intégrales elliptiques incomplètes [93] et dans le cas général, il faut recourir au calcul numérique.

La solution optimale est telle que :

$$x = \frac{H(\overline{M}^{(\circ)})}{H(\overline{M}_\Delta^{(\circ)})} ,$$

$$C = \left[H(\overline{M}_\Delta^{(\circ)})\right]^2 = J_{min} .$$

Le calcul a été fait dans des conditions réalistes, avec ou sans croissance des particules. Les profils correspondants à ces deux hypothèses sont relativement voisins (figure 40), et les caractéristiques de la tuyère optimale sont accentuées par la croissance et la solidification des particules. Cette forme n'est pas utilisable en pratique car elle conduirait à des pertes thermique et par divergence du jet inacceptables.

Le calcul peut également être fait pour des tuyères biconiques et comparé à la perte biphasique minimale. On forme donc le rapport :

$$\frac{|\delta I|}{|\delta I|_{min}} = \frac{\displaystyle\int_0^1 g(\overline{M}^{(\circ)}) \left(\frac{d\overline{M}^{(\circ)}}{dx}\right)^2 dx}{\left[\displaystyle\int_{\overline{M}_0^{(\circ)}}^{\overline{M}_\Delta^{(\circ)}} \sqrt{g(\zeta)}\, d\zeta\right]} .$$

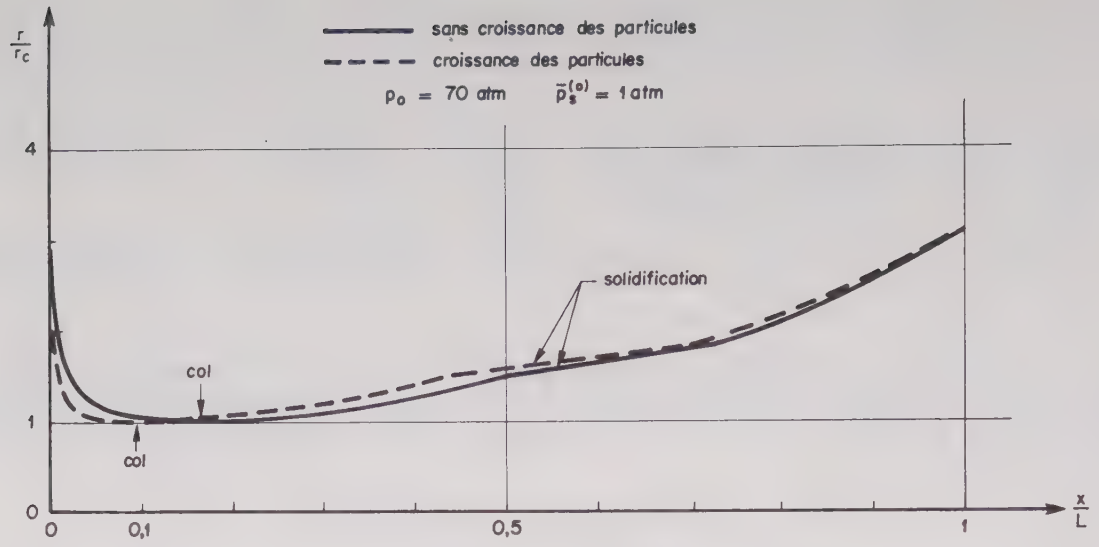


Fig. 40 - Forme optimale de tuyère pour la perte biphasique.

Les résultats sont résumés sur la figure 41. et sont à rapprocher de ceux de la figure 39. A longueur constante, la perte biphasique diminue lorsque le rayon de courbure augmente ; l'augmentation simultanée de la perte thermique peut expliquer la remontée de la courbe représentant la perte totale au delà de $\frac{R_c}{r_c} = 3$. A angle de convergent constant, la perte biphasique augmente avec le rayon de courbure de même que la perte thermique ce qui entraîne une forte croissance de la perte totale.

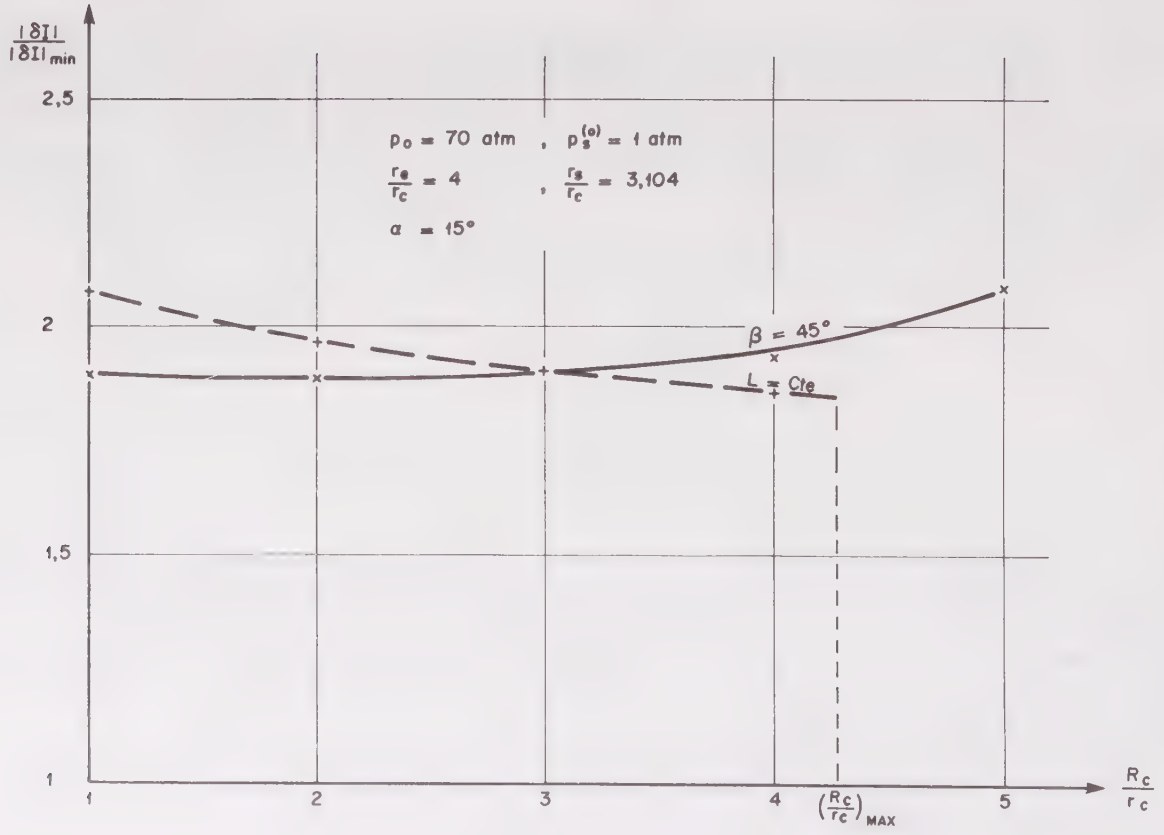


Fig. 41 - Influence de la géométrie de la tuyère sur la perte biphasique.

On constate également que la perte pour une tuyère conique est à peu près le double de la perte minimale; on ne peut donc espérer récupérer par l'optimisa-

tion de la tuyère au maximum que la moitié de la perte biphasique, soit 1,5 % pour le propulseur expérimenté. Ce gain sera de plus difficilement obtenu en raison du compromis à réaliser avec les pertes de paroi et les pertes par divergence du jet.

c) optimisation du divergent

La méthode de calcul de l'écoulement dans le divergent est celle des caractéristiques. Elle se prête bien au calcul des variations [97, 98] ; on peut également paramétrer le profil de la tuyère [96]. La contrainte de tuyère peut être la longueur, la surface, le périmètre ou le poids. Les calculs existants admettent l'hypothèse de particules de diamètre constant ; cette simplification permet néanmoins d'aboutir à des résultats intéressants car on montre que le profil de tuyère optimal est relativement insensible au diamètre des particules.

Les calculs montrent qu'à longueur de tuyère constante et pour un diamètre de col modéré (environ 60 mm), l'optimisation du divergent ne permet de gagner que 0,8 % par rapport à la tuyère conique de demi-angle 15°. Ce résultat ainsi que l'indication théorique trouvée en proche équilibre montrent que les gains qu'on peut espérer ne peuvent être que réduits.

7. CONCLUSIONS GÉNÉRALES

L'augmentation des pertes d'impulsion spécifique des propergols solides métallisés s'avère donc liée à l'existence d'une phase condensée dans les produits de combustion. L'influence de cette phase condensée apparaît assez générale et la difficulté principale du problème résulte dans le fait que la granulométrie des particules évolue pendant la détente des produits de combustion. Il a donc fallu tout d'abord préciser les caractéristiques de la phase condensée avant d'entreprendre l'analyse de l'écoulement.

La technique expérimentale retenue pour déterminer la granulométrie des particules est assez classique mais les efforts faits pour améliorer la méthode de dépouillement et l'interprétation des résultats ont permis un gain sensible de précision ; l'utilisation du microscope électronique s'est avéré en particulier intéressant. La fonction de répartition des particules est maintenant mieux connue sur

tout l'intervalle de diamètre ; des captations réalisées à l'intérieur du propulseur ont mis en évidence l'importance de la croissance des particules ; l'influence des paramètres de fonctionnement du propulseur est qualitativement mieux comprise.

L'analyse théorique du comportement de la phase condensée dans le propulseur a été reprise dans chaque zone intéressante : zone de combustion du propergol, chambre de combustion du propulseur, tuyère. Afin de découpler le problème de l'écoulement de celui de l'évolution de la phase condensée, on a schématisé, dans chacune de ces zones, le comportement de la phase gazeuse ; cette schématisation nous conduit à des modèles relativement simples nous permettant, dans une première analyse, des conclusions de caractère qualitatif et nous fixant des ordres de grandeur. On a mis en évidence la formation au cours de la combustion de deux classes de particules de diamètres très différents ; le temps de séjour des produits de combustion agit plus sur la répartition de la phase condensée entre les deux classes que sur la répartition des particules à l'intérieur de chacune de ces classes.

Les phénomènes qui sont à l'origine des collisions sont différents dans la chambre de combustion et dans la tuyère. Dans la tuyère, l'accélération de la phase gazeuse est le phénomène prépondérant. Dans la chambre de combustion, les fonctions de collisions sont encore mal connues ; elles semblent être différentes pour les petites et les grosses particules.

La principale action de la phase condensée, du point de vue des pertes d'impulsion spécifique, est celle intéressant la détente des produits de combustion dans la tuyère. La nature biphasique de l'écoulement nous a conduit à établir les équations de la phase condensée, de la phase gazeuse et du mélange. Ces équations fondamentales, données dans des hypothèses très générales mais plus particulièrement adaptées aux écoulements des suspensions mettent en évidence l'existence de phénomènes de relaxation, provenant des échanges irréversibles entre phases et dégradant la qualité de la détente. Les équations ont été tout d'abord appliquées à un écoulement de tuyère très simplifié (particules de diamètre uniforme et constant dans un gaz parfait) en vue d'en dégager les caractéristiques principales. Ce schéma a été progressivement modifié pour représenter le phénomène réel. Dans tous les cas, des calculs numériques assez complexes sont nécessaires. Toutefois, on a montré que des formules analytiques pour la perte d'impulsion spécifique peuvent être établies dans les cas extrêmes correspondant à de très petits ou de très gros propulseurs. Le second cas, assez représentatif de propulseurs existants, est le plus intéressant ; la formule analytique permet de prévoir simplement l'influence des paramètres de fonctionnement du propulseur sur la perte d'impulsion spécifique.

La phase condensée agit également sur les pertes plus classiques qui subsistent lorsque le propergol n'est pas métallisé : perte par divergence du jet et pertes de paroi. La perte par divergence, qui n'a pas un caractère physique mais résulte de la nécessité de conduire les calculs en écoulement par tranches, est plus difficile à calculer pour une suspension que pour un fluide homogène en raison de la ségrégation de la phase condensée au centre de l'écoulement. On a montré, à l'aide d'un schéma de calcul pour une écoulement parfaitement stratifié, que ce phénomène, s'il ne modifie que peu la formule classique de perte par divergence, entraîne une légère perte d'impulsion spécifique supplémentaire.

Les pertes de paroi sont affectées par la formation, sur une partie de la tuyère, d'une couche d'alumine condensée. Ce phénomène, jusqu'ici très mal connu, a été étudié du point de vue de sa formation, de son évolution et de ses conséquences. La couche d'alumine est formée par l'impact de particules d'alumine en suspension dans les produits de combustion; il s'agit donc d'un problème de captation lié à l'écoulement dans la zone d'entrée de la tuyère. Cette captation, correspondant à un défaut de masse éjectée, n'entraîne pas une perte d'impulsion spécifique significative. Le développement de la couche d'alumine est lié à son échauffement et à son état physique ; lorsqu'elle atteint superficiellement la température de fusion de l'alumine, l'action des forces de frottement devient importante. La couche se résoud au col de la tuyère en fines gouttelettes par un mécanisme d'instabilité

de film liquide. On a montré par le calcul qu'en dépit de la couche d'alumine, les pertes de paroi peuvent être calculées de façon classique : le frottement est peu sensible à la vitesse et à la température superficielle de la couche, et le coefficient d'échange thermique entre produits de combustion et tuyère change peu. En raison du caractère transitoire de l'échauffement de la tuyère, on a établi une formule originale donnant la densité de flux moyenne en un point de la paroi au cours du temps. Les mesures de la température de surface, et les calculs de flux qui en sont dérivés, sont en bon accord avec la théorie. Une formule a été donnée, exprimant la perte d'impulsion spécifique due aux phénomènes de paroi.

Les résultats ont été appliqués à un petit propulseur pour lequel on a déterminé au banc la perte globale d'impulsion spécifique. Cette mesure a nécessité un choix judicieux des moyens expérimentaux et de la méthode de dépouillement; la précision finalement obtenue a été voisine de 2 ‰ et a permis une comparaison entre théorie et expérience. Le recoupement est satisfaisant, les écarts se situant dans la fourchette d'imprécision due au hypothèses simplificatrices utilisées et à la connaissance encore imparfaite de la phase condensée. Les essais effectués pour connaître l'influence de la configuration du propulseur sur la perte d'impulsion spécifique ont confirmé la liaison étroite existant entre cette dernière et la granulométrie de la phase condensée. Nous avons démontré que la perte d'impulsion spécifique peut être difficilement réduite par une optimisation de la géométrie du propulseur alors qu'une action sur le propergol pourrait s'avérer plus intéressante.

L'amélioration des prévisions passe nécessairement par deux intermédiaires dont l'un est relatif à une meilleure connaissance de la phase condensée et l'autre à une description plus précise de la détente des produits de combustion. La principale difficulté qui ralentit les progrès relatifs à la granulométrie des particules provient de leur croissance, croissance qui se traduit du point de vue théorique par la nécessité de prendre en compte les collisions et du point de vue expérimental par le besoin de nouvelles méthodes de mesure. Ces méthodes de mesure doivent, sans perturber l'écoulement, autoriser une connaissance locale de la répartition des particules et permettre de préciser les fonctions de collision et de prévoir la granulométrie des particules à l'entrée de la tuyère en fonction des paramètres de fonctionnement. Les schémas de calcul de tuyère devront être bidimensionnels et la phase condensée devra y être décrite de façon réaliste ; la première étape sera de préciser le comportement des produits de combustion dans la région du col de la tuyère car cette zone s'est avérée très importante tant du point de vue de la phase gazeuse que de la phase condensée (croissance rapide des particules, ségrégation de la phase condensée). Il faut prévoir à ce stade des difficultés d'ordre numérique que des méthodes de calcul par approximations successives devraient en partie lever. Les calculs devront pouvoir prendre en compte les forces d'inertie résultant de l'accélération du propulseur (on sait expérimentalement que la combinaison des forces d'inertie centrifuges dues à la rotation du propulseur autour de son axe longitudinal et des forces d'inertie longitudinales est à l'origine d'une perte d'impulsion spécifique supplémentaire ; cet aspect particulier du problème général n'a pu être traité ici).

Les trois préoccupations qui nous ont guidé au cours de cette étude consistaient à faire le point des connaissances actuelles, à contribuer par la théorie et l'expérience à une meilleure compréhension des phénomènes et à dégager les orientations souhaitables des futurs travaux. Une réponse a été apportée sur ces trois points et il apparaît que de nouveaux progrès sont tributaires des recherches qui seront entreprises dès maintenant dans le domaine fondamental et sur le plan expérimental.

RÉFÉRENCES

[1] B. CRAMPEL - Chimie des constituants des propergols
Note technique ONERA n° 113, 1967.

[2] M. BARRERE - Problèmes énergétiques de la propulsion
Cours ENSA, 1965.

[3] S.E. COLUCCI - Experimental determination of solid rocket nozzle heat transfer coefficient
Ballistic Missile and Space Technology, vol. II, p. 303. Academic Press, 1960.

[4] J.D. HOFFMAN - An analysis of the effect of gas particles mixtures on the performance of rocket nozzles.
Jet Propulsion Center. Purdue University. Report TM-63-1, 1963.

[5] F.E. MARBLE - Dynamics of a gas containing small solid particles
Combustion and Propulsion fifth AGARD colloquium. Pergamon Press, p. 175, 1963.

[6] S.L. SOO - Dynamics of multiphase flow systems
Project SQUID. Technical Report ILL 18,P, 1964.

[7] F.A. WILLIAMS - M. BARRERE - N.C. HUANG - Fundamental aspects of solid propellant rockets.
AGARD ograph 116. Technivison Services, 1969.

[8] P. KUENTZMANN - Etude expérimentale de la phase condensée d'un propergol solide métallisé.
La Recherche Aérospatiale, n° 153, mars-avril 1973.

[9] B. BROWN - K.P. MAC ARTY - Particle size of condensed oxides from combustion of metallized solid propellants.
Eight Symposium on Combustion. The Williams and Wilkins Company, 1962.

[10] H. CHEUNG - N.S. COHEN - On the performance of solid propellant containing metal additives.
AIAA Solid Propellant Rocket Conference. Preprint n° 64 116, Palo Alto, Jan., 1964.

[11] L.A. POVINELLI - P.A. ROSENSTEIN - Alumina size distributions from high pressure composite solid propellant combustion
AIAA Journal, vol. 2, n° 10, p. 1754, oct. 1964.

E.W. PRICE - J.E. CRUMP - H.C. CRISTENSEN - R. SEGHAL - Comments.
AIAA Journal, vol. 3, n° 9, p 1790, sept. 1965.

[12] R.A. DOBBINS - L.D. STRAND - A comparison of two méthods of measuring particle size of Al_2O_3 produced by a small rocket motor
AIAA Journal, vol. 8, n° 9, p. 1544, sept. 1970

[13] J. BRULARD - Contribution à l'étude de la combustion des particules d'aluminium
La Recherche Aérospatale, n° 118, Mai-Juin 1967.

[14] J. CRABOL - Caractéristiques thermiques d'un jet de fusée contenant des particules d'alumine
Publication ONERA n° 133, 1970.

[15] R.N. JAMES - W.R. BABCOCK - H.S. SEIFERT -
A laser doppler technique for the measurement of particle velocity
AIAA Journal, vol.6, n° 1, p. 160, Jan. 1968.

[16] M.E. FOURNEY - J.H. MATKIN - A.P. WAGGONER - Aerosol size and velocity determination via holography.
The review of scientific instruments, vol.40, n° 2, p. 205, fev. 1969.

[17] E. BRUN - R. CARON - M. VASSEUR - Introduction à l'étude de la mécanique des suspensions.
Rapport technique GRA n° 15, 1945.

[18] W. LEWIS - R.J. BRUN - Impingement of water droplets on a rectangular half body in a two dimensionnal incompressible flow field.
NACA TN 3658.

[19] P. KUENTZMANN - Formation de la phase condensée dans un propulseur à propergol solide métallisé.
Note technique ONERA n° 210, 1973.

[20] P. KUENTZMANN - Agglomération des particules d'alumine dans l'écoulement de tuyère d'un propergol métallisé.
La Recherche Aérospatiale, n° 131, juillet - août 1969.

[21] M. BARRERE - Résultats expérimentaux récents sur la combustion de l'aluminium et d'autres métaux.
ONERA, T.P. n° 735, 1969.

[22] M. BARRERE - R. PRUD'HOMME - Aérothermochimie des écoulements homogènes.
Mémoires de Sciences Physiques, Gauthier Villars, 1971.

[23] G. GYARMATHY - Zur Wachstumgeschwindigkeit kleiner Flüssigkeitstropfen in einer übersättigen Atmosphär.
Z.A.M.P., vol.14, p. 280, 1963.

[24] R.M. JENKINS - R.T. HOGLUND - A unified theory of particle growth in rocket chambers and nozzles.
AIAA Paper, 69 541.

[25] F.E. MARBLE - Some gas dynamic problems in the flow of condensing vapors.
Astronautica Acta, vol.14, p. 585, 1969.

[26] R. CARUSO - Behavior of ultra small colloïd particles.
AFOSR 67 0933, 1967. Thiokol Chemical Corporation.

[27] H.L. FEIN - A theorical model for predicting aluminium oxide particles size distributions in rocket exhausts.
AIAA 2nd Aerospace Sciences Meeting, 1965.

[28] C.T. CROWE - P.G. WILLOUGHBY - A study of particle growth in a rocket nozzle.
AIAA Journal, vol. 5, n° 7, p. 1300, 1967.

[29] S.D. GRISHIN - A.P. TISHIN - R.I. KHAIRUTDINOV - Ecoulement biphasique en déséquilibre dans une tuyère de Laval avec la coagulation des particules du condensat polydispersé.
Akademiia Nauk. SSSR. Izvestia Mekhanika Zhidkosti i Gaza, n° 2, p. 112, 1969.

[30] G.L. BABUKHA - L.E. STERNIN - A.A. SCHRAIBER - Calcul des pertes diphasées dans une tuyère dues à la phase condensée.
Akademiia Nauk. SSSR. Izvestia Mekhanika Zhidkosti i Gaza, n° 1, p.175, 1971.

[31] F.E. MARBLE - Droplet agglomeration in rocket nozzles caused by slip and collision
Astronautica Acta, vol. 13, n° 2, p. 159, 1967.

[32] J.F. REGAN - H.D. THOMPSON - R.F. HOGLUND - Two dimensional analysis of transonic gas particles flow in axisymmetric nozzles.
AIAA Paper, n° 69 572.

[33] P. KUENTZMANN - Aérothermochimie des suspensions.
Mémoires de Sciences Physiques n° 72. Gauthier Villars, 1973.

[34] A. FORTIER - Mécanique des suspensions.
Masson 1967.

[35] R. PANTON - Flow properties for the continuum view point of a non equilibrium gas particle mixture.
Journal of fluids mechanics, vol. 31, part. 2, p. 273, 1968.

[36] D.A. DREW - L.A. SEGEL - An averaging approach to the theory of two phase flows.
International symposium on two phase flow. Paper 6-30. Haïfa, 1971.

[37] B.P. SELBERG. J.A. NICHOLLS - Drag coefficient of small spherical particles.
AIAA Journal, vol. 6, n° 3, p. 401, March 1968.

[38] D.J. CARLSON - R.F. HOGLUND - Particle drag and heat transfer in rocket nozzles.
AIAA Journal, vol. 2, n° 11, p. 1980, Nov. 1964.

[39] C.T. CROWE - Inaccuracy of nozzle performance predictions resulting from the use of an invalid drag law.
Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 7, n° 12, p. 1491, dec. 1970.

[40] R.W. BARTLETT - L.J. DELANEY - Effect of liquid surface tension on maximum particle size in two phase flow.
Pyrodynamics, vol. 4, p. 397, 1966.

[41] L. NAPOLITANO - Thermodynamique des systèmes composites en équilibre ou hors d'équilibre.
Mémoire de Sciences Physiques. Gauthier Villars, 1971.

[42] F.A. WILLIAMS - Combustion theory.
Addison Wesley. Publishing Company, 1965.

[43] V. QUAN - J.R. KLIEGEL - Axisymmetric two phase reacting gas non equilibrium nozzle flow.
NASA CR 92058, Aug. 1967.

[44] J.R. KLIEGEL - One dimensional flow of a gas particle system.
IAS Paper n° 60-5, 1960.

[45] P. DUBAN - J.NICOLAS - Influence de la présence de particules solides sur l'écoulement dans une tuyère.
La Recherche Aéronautique n° 92, Janv.-Fév. 1963.

[46] H.A. HASSAN - Exact solutions of gas particle nozzle flows.
AIAA Journal, vol. 2, n° 2, p. 395, feb. 1964.

[47] T.C. DELLINGER - H.A. HASSAN - Analysis of gas particle flows in rocket nozzles.
Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 3, n° 4, p. 601, Apr. 1966.

[48] W.D. RANNIE - Perturbation analysis of one dimensional heterogeneous flow in rocket nozzles.
Progress in astronautics and rocketry, vol. 6. Detonation and two phase flow.
Academic Press. 1962

[49] V.D. VENEDIKTOV - Two phase flow in turbines and reaction nozzles.
NASA TTF 613. Jun.1970.

[50] E.F. LYPE - One dimensional analysis of non isentropic two phase flow.
ARS Preprint 1605-61. 1961.

[51] R.D. GLAUZ - Combined subsonic supersonic gas particle flow.
ARS Preprint 1717-61. 1961

[52] W.S. BAILEY - E.N. NILSON - R.A. SERRA - T.F. ZUPNIK - Gas particle flow in a axisymmetric nozzle.
ARS Journal, vol. 31, p. 793, Jun 1961.

[53] J.A. HULTBERG - S.L. SOO - Flow of a gas solid suspension through a nozzle.
AIAA Paper 65-6, 1965.

[54] R.F. HOGLUND - Recent advances in gas particle nozzle flows.
ARS Journal, p. 662, May 1962.

[55] G. RUDINGER - Dynamics of gas particle mixtures with finite particle volume.
AIAA Paper n° 65-9.
Relaxation in gas particle flow.
Project SQUID T.R. CAL 96 PU. Jul. 1968.
Gas particle flow in convergent nozzles at high loading ratios.
Project SQUID T.R. CAL 98 PU. Jul. 1969.

[56] J.R. KLIEGEL - G.R. NICKERSON - Flow of gas particle mixtures in axially symmetric nozzles.
Progress in astronautics and rocketry, vol. 6, p. 173. Detonation and two phase flow. Academic Press 1962.

[57] J.D. HOFFMAN - S.A. LORENC - A parametric study of gas particle flows in conical nozzles.
AIAA Journal, vol. 3, n° 1, p. 103. Jan. 1965.
Correlation of performance of conical and contoured nozzles for gas particle flow.
AIAA Journal, vol. 4, n° 1, p. 169, Jan. 1966.

[58] H. SAUERWEIN - F.E. FENDELL - Method of characteristics in two phase flow.
The Physics of fluids, vol. 8, n° 8, p. 1564, 1965.

[59] D. MIGDAL - V.D. AGOSTA - Supersonic gas particle flow with chemical reactions.
The Physics of fluids, vol. 10, n° 4, p. 880, 1967.

[60] G.R. JOHNSON - Supersonic gas solid particle flow in a axisymmetric nozzle by the method of characteristics.
Von Karman Institute, T.N. 78, Aug. 1971.

[61] L.P. VERESHAHALKA - N.S.GALIUN - A.N.KRAIKO - L.E.STERNIN - Résultats du calcul d'un écoulement gazeux avec des particules dans des tuyères axisymétriques par la méthode des caractéristiques et comparaison avec les résultats de l'approximation unidimensionnelle.
Akademiia Nauk. SSSR. Izvestia Mekhanika Zhidkosti i Gaza, n° 3, p. 123, (1968).

[62] P. KUENTZMANN - Perte d'impulsion spécifique des propergols métallisés.
Entropie, à paraître.

[63] P. KUENTZMANN - Influence de l'hétérogénéité de la distribution de la phase condensée sur la performance des propergols solides.
La Recherche Aérospatiale n° 1970-3, p. 145.

[64] J.R. KLIEGEL - Gas particle nozzle flows.
9th International Combustion Symposium, Ithaca, Aug. 1962.

[65] R.C. PARKINSON - Convective heat transfer in rocket engines. Part 2. Heat transfer to the nozzles.
Rocket Propulsion Establishment. T.R. n° 67/16.

[66] J.R. HOWELL - M. KERN STRITE - H. RENKEL - Heat transfer analysis of rocket nozzles using very high temperature propellants.
AIAA Preprint n° 64-62, 1964.

[67] D.R. BARTZ - Turbulent boundary layer heat transfer from rapidly accelerating flow of rocket combustion gases and of heated air.
Advances in Heat Transfer, vol. 2, p. 1. Academic Press, 1965.

[68] R. MICHEL - Cours sur les couches limites professé à l'ENSA, 1963.
Développement de la couche limite en tuyère hypersonique.
ONERA T.P. n° 91, 1964.

[69] D.R. BARTZ - An approximate solution of compressible turbulent boundary layer development and convective heat transfer in convergent divergent nozzles.
ASME Paper n° 54-A-153.

[70] R.J. ZEAMER - Survey paper on erosion produced by two phase flow in solid propellant rocket motors.
AGARD Conference Processings, n° 52, 1970.

[71] E.W. UNGER - Heat transfer to a solid propellant rocket motor.
ARS Solid propellant rocket conference, 1962. Paper 2333-62.

[72] H.S. CARSLAW - J.C. JEAGER - Conduction of heat in solids.
Oxford at the Clarendon Press, 1965.

[73] A.S. LYCHEVSKII - Sur la stabilité des pellicules liquides dans les moteurs thermiques.
Traduction SEDOCAR n° 650329.

[74] I. DEE CHANG - P.E. RUSSELL - Stability of a liquid layer adjacent to a high speed gas stream.
The Physics of fluids, vol. 8, n° 6, p. 1018, Jun 1965.

[75] A. SHERMAN - J. SCHETZ - Breakup of liquid sheets and jets in a supersonic gas stream.
AIAA Journal, vol. 9, n° 4, Apr. 1971.

[76] A.H. NAYFEH - W.S. SARIC - Stability of a liquid film.
AIAA Journal, vol. 9, n° 4, Apr. 1971.

[77] M. SCAGNETTI - J. CRABOL - Sondes thermométriques à film de platine à réponse rapide.
La Recherche Aérospatiale n° 97, Nov. Déc. 1963, p. 23.

[78] M. SCAGNETTI - J. CRABOL - Mesure des flux de chaleur pendant la phase d'allumage d'un propergol solide.
La Recherche Aérospatiale n° 123, Mars - Avril 1968, p.45.

[79] D. BALAGEAS - Conduction non linéaire unidimensionnelle. Méthode par différences finies du type explicite.
Notes Techniques ONERA non publiées.

[80] A.V. LUIKOV - Methods of solving the non linear equations of unsteady state heat conduction.
Heat Transfer. Soviet Research, vol. 3, p. 1, May - June 1971.

[81] M.A. BIOT - New methods in heat flow analysis with application to flight structures.
Journal of the aeronautical Sciences, vol. 24, n° 2, p. 857, Dec. 1957.

[82] M.A. BIOT - H.C. AGRAWAL - Variational analysis of ablation for variable properties.
ASME Paper 63-WA 207, 1964.

[83] A.D. KIRSHENBAUM - J.A. CAHILL - The density of liquid aluminium oxide.
J. Inorg. Nucl. Chem. vol.14, n° 3-4, p. 283, 1960.

[84] M. BARRERE - Problèmes énergétiques de la propulsion.
Cours ENSA, spécialisation M.A.S., 1965.

[85] W.H. MILLER - D.K. BARRINGTON - A review of contemporary solid rocket motor performance prediction techniques.
Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 7, n° 3, p. 225, March 1970.

[86] L.J. GORDON - Ballistic effect of pyrolyzed liner in solid propellant motor firings.
ARS Journal, vol. 30, n° 5, p. 502, May 1960.

[87] J.W. KORDIG - G.H. FULLER - Correlation of nozzle submergence losses in solid rocket motors.
AIAA Journal, vol. 5, n° 1, p. 175, Jan. 1967.

[88] A.W. BLACKMAN - D.K. KUEHL - Use of binary light metal mixtures and alloys as additives for solid propellants.
ARS Journal, vol. 31, n° 9, p. 1265, Sept. 1961.

[89] A.M. MELLOR - I. GLASSMAN - Augmented ignition efficiency for aluminium.
Combustion Science and Technology, vol. 1, p. 437, 1970.

[90] E.M. LANDSBBAUM - Contour nozzles.
ARS Paper 734-58, 1958.

[91] E. LE GRIVES - Tuyères propulsives à grand rapport de détente.
Combustion and Propulsion fifth AGARD Colloquium.
Pergamon Press, p. 217, 1963.

[92] T.K. BOSO - T.R. SANKARANARAYANAN - Heat transfer optimization of convergent section of a hypersonic flow nozzle.
Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 8, n° 10, p.1090, Oct. 1971.

[93] F.E. MARBLE - Nozzle contours for minimum particle lag loss.
AIAA Journal, vol. 1, n° 12, p.2793, Dec. 1963.

[94] G. LEITMANN - Optimization techniques with applications to aerospace systems.
Academic Press, New-York, 1962.

[95] R.R. BEMS - Optimum nozzle contours for a dissociating gas with a catalyst.
Ph. D. Dissertation. Kansas State University, 1966.

[96] G.V. DRITOV - A.P. TISHIN - Choix d'un profil de tuyère pour un écoulement de gaz et de particules condensées.
Akademiia Nauk. SSSR. Izvestia Mekhanika Zhidkosti i Gaza, n° 1, p. 170, (1971).

[97] J.D. HOFFMAN - H.D. THOMPSON - A general method for determining optimum thrust nozzle contours for gas particle flows.
AIAA Paper n° 66-538, 1966.

[98] A.A. ELSBERND - J.D. HOFFMAN - Maximum thrust nozzles for gas particle flows.
AIAA Paper n° 72-1189, 1972.

Achevé d'imprimer à l'ONERA, novembre 1973 - Dépôt légal 4e trimestre 1973 - n° 452.

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . . D'ETAT . . . . .

THESE DE : . . . . PHYSIQUES . . . . .

NOM : Monsieur KUENTZMANN . . . . .

Prénoms : . . Paul . . . . .

né le 21 Novembre 1940 à . . Paris . . . . . Dépt : Seine

1ère THESE : . . " Contribution à l'étude des pertes d'impulsion spécifique dans les fusées à propergol solide. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . . . . . .

"L'Effet Pogo dans les fusées à propergol liquide. . . . . .

. . . . . .

PRESIDENT.M.FORTIER . . . . . .

EXAMINATEURS.MM.SIESTRUNCK

BARRERE

Vu et Approuvé

PARIS, le . 5 Juillet 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

ACADÉMIE DE PARIS
UNIVERSITÉ PARIS VI